Lycée qualifiant Tariq Ben Zyad Niveau : 1BAC-SEC	❖ DEVOIR LIBRE N° 1 ❖ 2022-2023 À rendre le 31/10/2022	Professeur : Bouyguir Taher www.proftaher.com

Exercice 1

Étudier les propositions suivantes :

$$P : (\forall x \in \mathbb{R}),\ x \leq -1 \Rightarrow x < 0;$$
$$Q : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists a \in \mathbb{R}),\ x < a < x+1;$$
$$R : (\sqrt{4} = 2) \vee (\sqrt{13} \neq 3);$$
$$S : (\exists a \in \mathbb{R}_+),\ a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{a} \in \mathbb{Z};$$
$$T : (\forall x \in \mathbb{R}),\ x^2 + \sqrt{2} > 0.$$

1. Étudier leur valeur de vérité et justifier.
2. Donner leur négation.
3. Les écrire sans utiliser les quantificateurs ni les symboles mathématiques.

Exercice 2

1. Par contraposition, montrer que $(\forall x, y \in \mathbb{R}),\ (x \neq -1 \wedge y \neq -1) \Rightarrow x + y + xy \neq -1$.
2. Par équivalences successives, montrer que, pour $x, y \in \mathbb{R}_+$: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \iff (x = 0 \vee y = 0)$.
3. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x + y + z > 1$. Par l'absurde, montrer que $x > \frac{1}{3}$ ou $y > \frac{1}{3}$ ou $z > \frac{1}{3}$.
4. Par récurrence, montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}),\ (\frac{5}{4})^n \geq 1 + \frac{n}{4}$, puis que $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ 1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n = \frac{5^{n+1}-1}{4}$.

Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 + 2 = -|x - 3|$.
2. Résoudre $(E_1) : x^2 - 3x - 4 = 0$ et $(E_2) : -x^2 + 2x + \frac{5}{4} = 0$.
3. Dresser dans un même tableau les signes des deux trinômes.
4. En déduire les solutions de $\frac{x^2-3x-4}{-x^2+2x+5/4} \leq 0$ et de $|-x^2 + 2x + \frac{5}{4}| + |x^2 - 3x - 4| \geq 0$.
5. Résoudre $4x^3 - 8x^2 - 5x = 0$ (utiliser la question 2).

Exercice 4

Le coût de fabrication de q vélos, en dirhams, est $C(q) = q^2 + 100q + 15000$.

1. Déterminer le nombre de vélos à fabriquer pour que le coût soit égal à 16100 DH.
2. Chaque vélo est vendu à 870 DH.
   a) Montrer que le bénéfice est $B(q) = -q^2 + 770q - 15000$.
   b) Déterminer le nombre minimum de vélos à fabriquer pour que le bénéfice soit strictement positif.
   c) Déterminer le nombre maximum de vélos à fabriquer pour que le bénéfice reste strictement positif.

Bon courage! ☺