Lycée qualifiant Tariq Ben Zyad Niveau : 1BAC-SEC	❖ DEVOIR LIBRE N° 2 ❖ 2022-2023 À rendre le 12/12/2022	Professeur : Bouyguir Taher www.proftaher.com

Exercice 1

On considère $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

1. Montrer que $x^2+x+1>0$ pour tout réel x et déterminer D_f.
2. Montrer que $\frac{2}{3}\leq f(x)\leq 2$. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$ et en déduire les extremums.
3. Montrer que $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{ab-1}{(a^2+a+1)(b^2+b+1)}$ pour $a\neq b$.
4. Étudier les variations sur $[1,+\infty[$, $[-1,1]$ et $]-\infty,-1]$.
5. Dresser le tableau de variations.

Exercice 2

On considère $f(x)=2(x+\frac{4}{x})$.

1. Déterminer D_f et étudier la parité de f.
2. Montrer que $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=2(1-\frac{4}{ab})$, pour $a,b\in D_f$, $a\neq b$.
3. Étudier les variations sur $]0,2]$ et $[2,+\infty[$.
4. Dresser le tableau de variations sur D_f.
5. Déterminer les extremums.
6. Une plaque rectangulaire a une aire égale à 4 et un côté de longueur $x>0$. Montrer que son périmètre est $p(x)=2(x+\frac{4}{x})$ et en déduire le périmètre minimal.

Exercice 3

On considère $f(x)=-x^2+2x+1$ et $g(x)=\sqrt{x-1}$.

1. Déterminer D_f, D_g et dresser les tableaux de variations.
2. Vérifier que $f(2)=g(2)$.
3. Construire les deux courbes dans un même repère orthonormé.
4. Résoudre graphiquement $f(x)<g(x)$ et $\sqrt{x-1}-2x\leq -x^2+1$.
5. Déterminer graphiquement $f([0,1])$ et $f([1,2])$.
6. On pose $h(x)=\sqrt{2x-x^2}$.
   a) Déterminer D_h.
   b) Vérifier que $h=g\circ f$.
   c) Montrer que h est croissante sur $[0,1]$ et décroissante sur $[1,2]$.
   d) Dresser son tableau de variations et en déduire $\sqrt{2x-x^2}\leq 1$ pour $x\in[0,2]$.

Exercice 4

On pose $u_n = \frac{2n^2-1}{n^2+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Montrer que $-1 \leq u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

Une entreprise fabrique chaque jour x milliers d'objets, $x \in [0,60]$. Le coût total, en milliers de dirhams, est $C(x) = x^2 - 30x + 300$.

1. Étudier les variations de C sur $[0,15]$ et $[15,60]$; dresser le tableau avec les images aux bornes.
2. Chaque objet est vendu à 10 DH. Exprimer la recette $R(x)$ en milliers de dirhams.
3. Montrer que le bénéfice, en milliers de dirhams, est $B(x) = -x^2 + 40x - 300$.
4. Étudier les variations de B sur $[0,20]$ et $[20,60]$ et dresser le tableau avec les images aux bornes.
5. Déterminer la quantité à produire pour obtenir un bénéfice maximal et calculer ce bénéfice.
6. Résoudre $B(x) \geq 0$ et interpréter économiquement.
7. Tracer la courbe de B sur $[0,60]$. Résoudre graphiquement $B(x) \geq 40$ et interpréter.

Exercice 6

Une société produit au plus 100 unités. Les coûts fixes sont de 300 DH et le coût variable est de 2 DH par unité.

1. Exprimer le coût total $C(x)$ pour x unités.
2. Pour $x \in]0,100]$, le coût unitaire est $f(x) = C(x)/x$. Vérifier que $f(x) = 2 + 300/x$ et tracer $g(x) = 300/x$.
3. Chaque unité est vendue à 5 DH. À partir du graphique, déterminer à partir de quelle quantité la production est rentable.

Exercice 7

Une entreprise possède 40 camions en 2015 et en achète 8 supplémentaires chaque année. On note u_n le nombre de camions en $2015 + n$, donc $u_0 = 40$.

1. Calculer le nombre de camions en 2016, 2017 et 2018.
2. Ces nombres forment-ils une suite ?
3. Déterminer une relation de récurrence pour (u_n).
4. Exprimer u_n en fonction de n.
5. Combien de camions possède-t-elle en 2022 ?

Bon courage ! ☺