| Lycée qualifiant Tariq Ben Zyad<br>Niveau : 1BAC-SEC | ❖ DEVOIR LIBRE N° 3 ❖<br>2022-2023<br>À rendre le 02/01/2023 | Professeur : Bouyguir Taher<br>www.proftaher.com |
|---|---|---|

## Exercice 1

On considère $u_1 = \frac{7}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{7u_n+3}{3u_n+7}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier que $u_{n+1} - 1 = \frac{4(u_n-1)}{3u_n+7}$.
2. Montrer par récurrence que $u_n \geq 1$.
3. Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{3(u_n-1)(1-u_n)}{3u_n+7}$ et montrer que $(u_n)$ est décroissante.
4. On pose $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$.
   a) Montrer que $(v_n)$ est géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et calculer $v_1$.
   b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
   c) Calculer $S = v_1 + v_2 + \cdots + v_{20}$.

## Exercice 2

Un sac contient 5 boules blanches, 3 vertes et une bleue. On tire successivement et sans remise 3 boules. Déterminer le nombre de tirages :

1. possibles ;
2. contenant trois boules blanches ;
3. contenant trois boules bleues ;
4. contenant une boule de chaque couleur ;
5. contenant trois boules de même couleur ;
6. contenant au moins deux boules vertes ;
7. contenant au plus deux boules blanches ;
8. ne contenant aucune boule blanche ;
9. contenant une boule bleue et deux boules vertes.

## Exercice 3

On considère $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{4}{4-u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $u_n < 2$.
2. Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-2)^2}{4-u_n}$ et en déduire que $(u_n)$ est croissante.
3. On pose $v_n = \frac{1}{u_n-2}$.
   a) Montrer que $v_{n+1} = \frac{4-u_n}{2(u_n-2)}$, puis que $(v_n)$ est arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$.
   b) Calculer $v_0$ et exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
   c) Calculer $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_{10}$.

## Exercice 4

On considère $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n+3}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $u_n > 1$.
2. Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{2u_n+3}$.
3. Montrer que $(u_n)$ est décroissante.
4. On pose $v_n = \frac{u_n-1}{u_n}$.
   a) Montrer que $(v_n)$ est géométrique de raison $\frac{3}{5}$.
   b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
   c) En déduire que $u_n = \frac{2}{2-(3/5)^n}$.
   d) Calculer $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_{29}$.

## Exercice 5

Hasna possède 8000 DH en janvier et augmente ce capital de 10% à la fin de chaque mois. Samir possède 10000 DH en janvier et ajoute 500 DH à la fin de chaque mois.

**I. Capital de Hasna.** On note $u_n$ le capital après $n$ mois.

1. Calculer $u_1, u_2$ et donner la relation de récurrence.
2. Montrer que $(u_n)$ est géométrique de raison 1,1 et de premier terme 8000.
3. Calculer le capital en janvier de l'année suivante.
4. Calculer le pourcentage d'augmentation sur une année complète.

**II. Capital de Samir.** On note $v_n$ le capital après $n$ mois.

1. Calculer $v_1, v_2$ et donner la relation de récurrence.
2. Déterminer la nature de $(v_n)$, sa raison et son premier terme.
3. Calculer le capital en janvier de l'année suivante.
4. Calculer le pourcentage d'augmentation sur une année complète.

À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quel mois les économies de Hasna dépassent celles de Samir.

## Exercice 6

On choisit un groupe de 6 personnes parmi 25 femmes et 32 hommes.

1. Combien de groupes différents peut-on constituer?
2. Combien de groupes contiennent :
   a) uniquement des hommes;
   b) des personnes de même sexe;
   c) au moins une femme et au moins un homme?

Bon courage! ☺