Lycée qualifiant Tariq Ben Zyad Niveau : 1BAC-SEC	❖ DEVOIR SURVEILLÉ N° 1 ❖ 2022-2023 Durée : 2 h	Professeur : Bouyguir Taher www.proftaher.com

Exercice 1 : 5 points

Les questions sont indépendantes.

1. Étudier la vérité des propositions et justifier : ..... **[2 pt]**

$$P : (\exists x \in \mathbb{R}),\ x^2+x-2=0; \qquad Q : (\sqrt{2} \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (1 \text{ est premier});$$
$$R : (2+5=8) \iff (a^{2^{\times 0}}=1); \qquad S : (\forall x \in \mathbb{R}),\ x^2+3x+1>0.$$

On suppose $a \neq 0$.

2. Écrire avec des quantificateurs : ..... **[1 pt]**
   a) Pour tout réel x, il existe un unique entier relatif p tel que $p < x < p+1$.
   b) Il existe un réel a tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $a \leq x$.
3. Donner les négations : $N : (\forall n \in \mathbb{N}^*),\ (n \neq 1 \Rightarrow 6 > n \geq 2)$ et $M : (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}),\ (x \leq y \iff y = 1)$. .. **[1 pt]**
4. Montrer que $(P \Rightarrow Q) \iff (\overline{P} \vee Q)$ est une loi logique. ..... **[1 pt]**

Exercice 2 : 3 points

On considère $P : (\exists x \in \mathbb{R}),\ \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $Q : (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}),\ x^2+xy+1<0$.

1. Donner la négation de P et de Q. ..... **[1 pt]**
2. Montrer que P est vraie et Q fausse. ..... **[1 pt]**
3. En déduire la valeur de vérité de $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$, soit : ..... **[1 pt]**

$$[(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}),\ x^2+xy+1 \geq 0] \Rightarrow [(\forall x \in \mathbb{R}),\ \sqrt{1+x^2} \neq \tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}].$$

Exercice 3 : 4 points

1. Par disjonction des cas, montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}),\ \sqrt{x^2+1}-x>0$. ..... **[1 pt]**
2. Par récurrence, montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. ..... **[1 pt]**
3. Par contraposition, montrer que, pour $x, y \in \mathbb{R}^*$: $(x \neq y \wedge xy \neq 1) \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} \neq \frac{y}{y^2+1}$. ..... **[1 pt]**
4. Par équivalences successives, montrer que, pour $x>0$: $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=5 \iff \left|\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right| = \sqrt{21}$. ..... **[1 pt]**

Exercice 4 : 8 points

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|x-2|+|x-1|>5$. ..... **[2 pt]**
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2+|x-2|+3=0$. ..... **[2 pt]**
3. Résoudre $2x^2+x-1=0$ et $-x^2+3x-2=0$. ..... **[2 pt]**
4. En déduire les solutions de $\frac{2x^2+x-1}{-x^2+3x-2} \leq 0$. ..... **[2 pt]**

Bon courage ! ☺