Exercice 1 : Quelques raisonnements

1. On considère les propositions

$$P : (\forall y \in \mathbb{R}^*)(\exists x \in \mathbb{R}),\ x^2 - xy + y^2 = 0, \qquad Q : (\forall x \in \mathbb{R}),\ \sqrt{1+x^2} - |x| \geq 0.$$

   a) Nier les propositions P et Q.

   b) Montrer que P est fausse et que Q est vraie.

2. Nier la proposition : $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2),\ a - b > 1 \Rightarrow (\exists N \in \mathbb{Z}),\ a < N < b$.

3. a) Montrer, par contraposition, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n^2}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{n}{3} \in \mathbb{N}$.

   b) En déduire, par l'absurde, que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3 - 2|x-4| = 2x+5$ et $|x-1| + |x+1| = 4$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $2n+1$ est un carré parfait, alors $n+1$ est la somme de deux carrés parfaits.

Exercice 2 : Récurrence

Montrer par récurrence que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 9 divise $7^n + 21n - 1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$.

Exercice 3 : Généralités sur les fonctions

On considère $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = \dfrac{-x^2+2x+7}{2}$.

1. Déterminer D_f, puis dresser le tableau de variations de f.

2. Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé.

3. Déterminer graphiquement $f([-1;0])$ et $f([0;+\infty[)$.

4. Vérifier que $f(3) = g(3)$, puis dresser le tableau de variations de g.

5. Construire la courbe $\mathscr{C}_g$ dans le même repère.

6. Résoudre graphiquement $2\sqrt{x+1} + x^2 - 2x - 7 < 0$.

7. Soit h, définie sur $[-1;+\infty[$ par $h(x) = -\dfrac{1}{2}x + \sqrt{x+1} + 3$.

   a) Vérifier que $h = g \circ f$.

   b) En déduire les variations de h sur $[-1;0]$ et sur $[0;+\infty[$.

   c) En déduire que, pour tout $x \in [-1;+\infty[$, $-x + 2\sqrt{x+1} \leq 2$.

Exercice 4 : Extremums d'une fonction

Soit $f(x) = \dfrac{x^2-4x+6}{x^2-4x+8}$.

1. Vérifier que $x^2 - 4x + 8 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis déterminer D_f.

2. Montrer que $f(2) = \dfrac{1}{2}$ est la valeur minimale de f sur D_f.

3. Montrer que $f(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le nombre 1 est-il la valeur maximale de f sur D_f ?

Bon courage ! ☺