Exercice 1

Partie I. Soit $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$. Son tableau de variations est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$	‖ $+\infty$	↘	3	↗ $+\infty$

1. Déterminer les extremums de f sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$.
2. Déterminer $f(]2;+\infty[)$ et $f(]1;2[)$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 3$.

Partie II. On considère g, définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $g(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$, et l'on pose $h = g \circ f$.

1. Dresser le tableau de variations de g.
2. Montrer que $D_h = \mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.
3. Étudier la monotonie de h sur $]2;+\infty[$ et sur $]1;2[$.
4. Dresser le tableau de signes de $g(x)$, puis en déduire que $f \circ g$ est décroissante sur $[-1;3[$.

Exercice 2

Dans un repère orthonormé direct, on considère $A(2;\sqrt{3})$, $I(4;\sqrt{3})$ et $J(5;0)$. Soit (C) l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $x^2+y^2-6x+5=0$.

1. Montrer que (C) est un cercle ; déterminer son centre Ω et son rayon R, puis le tracer.
2. Vérifier que $A \in (C)$.
3. Donner une équation cartésienne de la tangente (D) à (C) en A.
4. Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par I et perpendiculaire à (D).
5. Montrer que (Δ) et (C) sont sécants en I et J.
6. Calculer $\cos(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ})$, $\sin(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ})$ et l'aire du triangle AIJ.
7. Résoudre graphiquement le système $\begin{cases} x^2+y^2-6x+5 \le 0, \\ \sqrt{3}x+y-5\sqrt{3}=0. \end{cases}$

Exercice 3

Soit ABC un triangle. On définit I, J et K par

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \qquad \overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA}, \qquad \overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}.$$

Faire une figure et montrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes en un point à déterminer.
Indication : utiliser l'associativité du barycentre ; I est le barycentre de $(B;2)$ et $(C;1)$.

Bon courage ! ☺