Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{8(u_n - 1)}{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 < u_n < 4$.
3. Étudier la monotonie de (u_n).
4. Montrer que $4 - u_{n+1} \leq \dfrac{4}{5}(4 - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire par récurrence que $4 - u_n \leq \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.
6. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Montrer que $S_n \geq 4n - 1 + \dfrac{4^{n+1}}{5^n}$.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$.
   a) Écrire v_{n+1} en fonction de u_n.
   b) Montrer que (v_n) est géométrique ; déterminer sa raison et v_0.
   c) Écrire v_n en fonction de n, puis en déduire u_n en fonction de n.

Exercice 2

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$, puis résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'équation $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$ et l'inéquation $\sqrt{3}\cos x - \sin x > 1$.
2. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que $1 + \cos(4\beta) + \sin(4\beta) = 2\sqrt{2}\cos(2\beta)\sin\left(2\beta + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
3. Soit $\alpha \in]0;\pi/6[$.
   a) Montrer que $\tan(3\alpha) = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ (remarquer que -1 est une racine).
   c) En déduire la valeur de $\tan(\pi/12)$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\sin x; \qquad \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}.$$

Bon courage ! ☺