Lycée qualifiant Tariq Ben Zyad Niveau : 1 BAC-SEF	❖ DEVOIR SURVEILLÉ N° 3 ❖ Semestre 1	Professeur : Bouyguir Taher www.proftaher.com

Exercice 1 : 10 points

Soit (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $0 < u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ..... **[1 pt]**
2. Étudier la monotonie de (u_n). ..... **[1 pt]**
3. Montrer que $0 < 2 - u_{n+1} < \dfrac{1}{2}(2 - u_n)$. ..... **[1 pt]**
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 2}$.
   a) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_n. ..... **[1 pt]**
   b) Montrer que (v_n) est géométrique de raison 4. ..... **[1 pt]**
   c) Calculer v_0, puis exprimer v_n en fonction de n. ..... **[1 pt]**
5. Montrer que $u_n = \dfrac{2v_n + 1}{v_n - 1}$, puis exprimer u_n en fonction de n. ..... **[2 pt]**
6. Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n. ..... **[1 pt]**
7. Pour $n \geq 1$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{3}{u_k - 2}$. Montrer que $T_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{4^n}{3} - n$. ..... **[1 pt]**

Exercice 2 : 6 points

I. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sin(2x) - 2\cos^2 x$.

1. Montrer que $\sin x - \cos x = -\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. ..... **[1 pt]**
2. En déduire que $f(x) = -2\sqrt{2}\cos x \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. ..... **[1 pt]**
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$. ..... **[1 pt]**

II.

1. Vérifier que $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$. ..... **[1 pt]**
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 1$. ..... **[1 pt]**
3. En déduire les solutions dans $[-\pi;\pi[$ de $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) > 1$. ..... **[1 pt]**

Exercice 3 : 4 points

1. Calculer $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$, puis montrer que $\tan(\pi/12) = 2 - \sqrt{3}$. Indication : $\pi/12 = \pi/4 - \pi/6$. .. **[2 pt]**
2. Pour $x \notin \{k\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, montrer que $\dfrac{1}{\tan(\pi/2 - x)} = \tan x$. ..... **[1 pt]**
3. En déduire que $\tan^2(\pi/12) + \tan^2(5\pi/12) = 14$. Indication : $\pi/12 + 5\pi/12 = \pi/2$. ..... **[1 pt]**

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Bon courage ! ☺