Lycée qualifiant Tariq Ben Zyad Niveau : 2BAC-SEC	❖ DEVOIR LIBRE N° 2 ❖ 2025-2026 À rendre le 05/01/2026	Professeur : Bouyguir Taher www.proftaher.com

Exercice 1 :(9pts)

Soit (u_n) est la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{-9}{u_n+6} \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Démontrer par récurrence que : $u_n > -3$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (1 Pts)
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n+3)^2}{u_n+6}$ (1 Pts)
3. Étudiez la monotonie de (u_n) . (1 Pts)
4. (u_n) est elle convergente? (Justifier) (1 Pts)
5. On considère la suite numérique(v_n) définie par : $v_n = \frac{1}{u_n+3}$; $\forall n \in \mathbb{N}$
   a) Montrer que : $v_{n+1} = \frac{6+u_n}{3(u_n+3)}$; $\forall n \in \mathbb{N}$ (1 Pts)
   b) Montrez que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1/3$ (1 Pts)
   c) Calculer v_0, puis écrivez v_n en fonction de n. (1 Pts)
   d) Déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = \frac{-3n}{n+1}$ et calculer $\lim u_n$. (1 Pts)
   e) Calculer la somme : $S_{10} = v_0 + v_1 + \cdots v_{10}$ (1 Pts)

Exercice 2 :(6pts)

Soit (u_n) est la suite numérique définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 8} \end{cases}$$

On considère la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [0;4]$ par : $f(x) = \sqrt{2x+8}$

1. Montrez que f est croissante sur I, et déterminer $f(I)$. (1 Pts)
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur I. (1 Pts)
3. Montrez que $\forall x \in I$; $f(x) \geq x$ (1 Pts)
4. Démontrez par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leqslant u_n \leqslant 4$. (1 Pts)
5. Montrez que (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente. (1 Pts)
6. Déduire : $\lim u_n$ (1 Pts)

Exercice 3 :(5pts)

I)- Soit f est la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$.

1. Trouer deux nombres a et b tels que : $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2}$ (1 Pts)
2. Trouver la primitive de f qui vérifie $F(\frac{1}{2}) = 6$ (2 Pts)

II)- Déterminer la primitive de la fonction $g(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$ qui est vérifie : $G(0) = 0$ (2 Pts)

Bon courage! ☺