## Exercice 1 (15 points)

**Partie I**

Soit $g$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \ln(x)$

1. Calculez $g'(x)$ puis dressez tableau de variation de $g$ sur $]0;+\infty[$ ..... (1.5 pts)
2. Déduire que : $(\forall x \in ]0;1])$ , $g(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [1;+\infty[)$ , $g(x) \geq 0$ ..... (1 pt)

**Partie II**

On considère la fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln(x) + \frac{1}{2}(\ln(x))^2$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Calculez $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement ..... (1 pt)
2. Montrez que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x} = 0$ ..... (1 pt)
3. Étudiez le branches infinie de $f$ au voisinage de $+\infty$ ..... (1 pt)
4. Montrez que : $(\forall x \in ]0;+\infty[) : f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ..... (1 pt)
5. Dressez le tableau de variations de la fonction $f$ sur $]0;+\infty[$ ..... (1 pt)
6. Montrez que : $(\forall x \in ]0;+\infty[ : f''(x) = \frac{2-\ln(x)}{x^2}$ ..... (1 pt)
7. Étudiez la convexité de $f$ en déterminons le point d'inflexion de $(\mathscr{C}_f)$ ..... (1.5 pts)
8. Étudiez la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ avec la droite $(D)$ d'équation $y = x$ ..... (1 pt)
9. Tracez soigneusement $(\mathscr{C}_f)$ et $(D)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. ..... (1 pt)

**Partie III**

Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ , $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ , $1 \leq u_n \leq e$ ..... (1 pt)
2. Montrer que $(u_n)$ est croissante. ..... (0.5 pt)
3. Déduire que $(u_n)$ est convergente. ..... (0.5 pt)
4. Calculez la limite de $u_n$ ..... (1 pt)

## Exercice 2 (5 points)

I) On considère la fonction $h$ définie par : $h(x) = \frac{4x}{x^2+2x-3}$

1. Déterminer les deux réels $a$ et $b$ tels que : $h(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}$ ..... (1 pt)
2. Déduire les primitives de la fonction $h$ ..... (1 pt)
3. Déterminer la primitive $H$ de $h$ qui est vérifié : $H(2) = 4\ln(5)$ ..... (1 pt)

II) Déterminer les primitives des fonctions : $g(x) = \tan(x)$ et $v(x) = \frac{1}{3}\sqrt{5+3x}$ ..... (2 pts)

Bon courage! ☺