Exercice 1 : 9 points

Partie I. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$.

1. Calculer $g'(x)$ puis étudier son signe sur $\mathbb{R}$. ..... **[1 pt]**
2. Calculer $g(0)$ puis dresser le tableau de variations de g. ..... **[1 pt]**
3. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 1$. ..... **[1 pt]**

Partie II. On considère $f(x) = (x+1)e^{-x} + x - 1$, définie sur $\mathbb{R}$, et sa courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. a) Montrer que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et calculer $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$. ..... **[1 pt]**
   b) Interpréter graphiquement ces résultats. ..... **[0,5 pt]**
2. a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (x-1))$. ..... **[1 pt]**
   b) Donner une interprétation géométrique du résultat obtenu. ..... **[0,5 pt]**
3. a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$. ..... **[1 pt]**
   b) En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations. ..... **[1 pt]**
   c) Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0. ..... **[1 pt]**
   d) Résoudre $f(x) = x - 1$ et en déduire les points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et de $(\Delta) : y = x - 1$. ..... **[1 pt]**
4. Montrer que $f''(x) = e^{-x}(x-1)$, puis étudier la concavité de $(\mathscr{C}_f)$. ..... **[1 pt]**
5. Construire $(\mathscr{C}_f)$ et (Δ). ..... **[1 pt]**

Exercice 2 : 11 points

Partie I. Dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ du plan complexe, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 3+4i$, $b = 3+8i$, $c = 2+3i$ et $d = 5+6i$.

1. Montrer que A, C et D sont alignés. ..... **[1 pt]**
2. a) Montrer que $\frac{a-b}{d-b} = 1-i$, puis écrire ce nombre sous forme exponentielle. ..... **[1 pt]**

   b) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA})$, puis montrer que $BD = \frac{\sqrt{2}}{2}BA$. ..... **[1 pt]**

Partie II. On pose $u = \sqrt{3}-i$, $v = \sqrt{2}(1+i)$ et $w = u+v$.

1. a) Écrire sous forme trigonométrique u, v et $\frac{v}{u}$. ..... **[1,5 pt]**

   b) Déterminer la forme algébrique de $\frac{v}{u}$ puis en déduire $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$. ..... **[1 pt]**

2. On considère les points E, F et P d'affixes respectives u, v et w.

   a) Placer E, F et P en utilisant les formes trigonométriques de u et v. ..... **[1 pt]**

   b) Montrer que $OEPF$ est un losange. ..... **[1 pt]**

   c) Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF})$, puis déterminer $\arg(w)$. ..... **[1,5 pt]**

3. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{5\pi}{12}$. Montrer que $R(E) = F$. ..... **[1 pt]**
4. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\left|\dfrac{z+i-\sqrt{3}}{iz+\sqrt{2}-\sqrt{2}i}\right| = 1$. ..... **[1 pt]**

Bon courage! ☺