Exercice 1 :(20pts)

Partie I : On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{e^{-(\ln(x))^2}} & si \quad x\in]0;+\infty[\\ f(0)=0 \end{cases}$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis interpréter le résultat graphiquement.....(1 pt)
2. Montrer que f est continue à droite on 0. ..... (1pt)
3. a) Vérifier que $(\forall x\in]0;+\infty[) : \dfrac{f(x)}{x}=\sqrt{e^{-(2+\ln(x))\ln(x)}}$ .....(1pt)
   b) Montrer que f est dérivable à droite en 0 , puis interpréter le résultat graphiquement ..... (1 pt)
4. a) Montrer que $(\forall x\in]0;+\infty[) : f'(x)=\dfrac{-\ln(x)\times f(x)}{x}$ .....(1 pt)
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ $(\forall x\in[0;+\infty[)$, puis dressez le tableau de variations de f .....(1 pt)
5. a) Vérifier que $(\forall x\in]0;+\infty[) : f(x)-x=x\left(\sqrt{e^{-(2+\ln(x))\ln(x)}}-1\right)$ .....(1pt)
   b) Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ avec la droite $(D) : y=x$ .....(1 pt)
   c) En déduire que $(\forall x\in[e^{-1};1]) : f(x)\geq x$ .....(0.5 pt)
6. Tracez soigneusement $(\mathscr{C}_f)$ et (D) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ .....(1 pt)
7. Soit h la restriction de la fonction f sur $I=[1;+\infty[$.
   a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. ..... (1pt)
   b) Déterminer l'expression de $h^{-1}(x)$ pour tout x de J.....(1 pt)
   c) Tracez soigneusement $(\mathscr{C}_{h^{-1}})$ dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.....(0.5 pt)
8. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^x\ln(e^{-x}+1)$.
   a) Déterminer la primitive G de g sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $G(0)=0$ (**Indication :** Calculer $g'(x)-g(x)$) ..... (1 pt

Partie II : Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0=\sqrt{e^{-1}} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

1. Montrer en utilisant le récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N}) : e^{-1}\leq u_n\leq 1$ ..... (1 pt)
2. Étudier la monotone de la suite (u_n).....(1pt)
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente ; puis Déterminer sa limite .....(1pt)
4. a) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}) : |\ln(u_{n+1})|\leq\dfrac{1}{2}|\ln(u_n)|$ .....(1 pt)
   b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}) : e^{\left(\frac{-1}{2^{n+1}}\right)}\leq u_n\leq e^{\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)}$ .....(0.5 pt)
   c) Calculer de nouveau $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .....(0.5 pt)
5. On pose : $(\forall n\in\mathbb{N})$, $v_n=\ln(|\ln\sqrt{u_n}|)=\ln(-\ln\sqrt{u_n})$
   a) Montrez que (v_n) est une suite géométrique de raison 2. .....(0.5 pt)
   b) Calculez v_0 puis exprimez v_n en fonction de n. .....(0.5 pt)
   c) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}) : u_n=e^{(-2)^{1-2^{n+1}}}$ .....(0.5 pt)
   d) Calculez en fonction de n le produit : $P_n=\ln(u_0)\times\ln(u_1)\times\ldots\times\ln(u_n)$ .....(0.5 pt)

Bon courage! ☺