Exercice 1 :

Partie I : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - 2\sqrt{e^x} + 2$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$, puis en déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) > 0$ ..... (1 pt)
2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ..... (1 pt)
3. Déterminer G la primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui vérifier $G(\ln(2)) = 0$ ..... (1 pt)

Partie II : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$
Soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, puis interpréter le résultat graphiquement..... (1 pt)
2. a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f(x) = 2x + 2\ln(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x})$, puis Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ..... (1 pt)
   b) Montrer que la droite $(D) : y = 2x$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ ..... (1 pt)
   c) Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ avec la droite $(D) : y = 2x$..... (1 pt)
3. a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = \dfrac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{g(x)}$ ..... (1 pt)
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$, puis dressez le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ ..... (1 pt)
4. a) Montrer que : $\forall x \in [0;\ln(4)] : g(x) \leq \sqrt{e^x}$ ..... (1 pt)
   b) En déduire que : $\forall x \in [0;\ln(4)] : f(x) \leq x$ ..... (1 pt)
5. Donner l'équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ au point O. ..... (1 pt)
6. Tracez soigneusement $(\mathscr{C}_f)$ et (D) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ..... (1 pt)
7. Discuter suivant les valeurs du paramétre m, le nombre de solutions de $(E) : e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 - e^m = 0$..... (1 pt)
8. Soit h la restriction de la fonction f sur $I = [0;+\infty[$.
   a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer..... (1 pt)
   b) Déterminer l'expression de $h^{-1}(x)$ pour tout x de J..... (1 pt)
   c) Tracez soigneusement $(\mathscr{C}_{h^{-1}})$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$..... (1 pt)

Partie III : Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f((u_n) \end{cases}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrez que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq \ln(4)$ ..... (1 pt)
2. Étudiez la monotone de la suite (u_n)..... (1 pt)
3. Montrez que la suite (u_n) est convergente en déterminant sa limite . ..... (1 pt)

Exercice 2 :

1. Calculer les limites suivantes :
   $\lim\limits_{x\to0^+} (x+1)^{\frac{1}{x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+1)\ln(1+x^{-3})$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{e^x - 1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}})^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ ..... (1 pt)
2. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $1 + x \leq e^x$ et et $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ $lnx \leq x - 1$ ..... (1 pt)

Bon courage! ☺