Lycée qualifiant Tariq Ben Zyad Niveau : 2 BAC-SVTF	❖ DEVOIR SURVEILLÉ N° 2 ❖ Semestre 1 – Sujet A	Professeur : Bouyguir Taher www.proftaher.com

Exercice 1 (10.5 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+3x+6}{x+1}$

Et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans une repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$ et calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. ..... (1.5 pts)
2. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats. ..... (2 pts)
3. a) Montrer que : $(\forall x\in\mathscr{D}_f) : f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ ..... (1 pt)
   b) En déduire que f est croissante sur les deux intervalles : $]-\infty;-3]$, $[1;+\infty[$ ..... (0.5 pt)
   c) En déduire que f est décroissante sur $[-3;-1[\cup]-1;1]$. ..... (0.5 pt)
   d) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathscr{D}_f$. ..... (1 pt)
4. Vérifier que $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x+1}$, $(\forall x\in\mathscr{D}_f)$ ..... (0.5 pt)
5. a) Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]$ ..... (1 pt)
   b) En déduire les branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ ..... (1 pt)
6. Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ avec la droite (D) d'équation $y=x+2$ ..... (1 pt)
7. Écrire l'équation de la tangente de $(\mathscr{C}_f)$ au point $x_0=0$ ..... (0.5 pt)
8. Tracez soigneusement $(\mathscr{C}_f)$ et (D) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. ..... (1 pt)

Exercice 2 (9.5 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2} \end{cases}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

1. Montrez en utilisant le récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N}) : 2<u_n<4$ ..... (1 pt)
2. Étudiez la monotone de la suite (u_n). ..... (1 pt)
3. Montrez que : $(\forall n\in\mathbb{N}), 0<4-u_{n+1}<\dfrac{4}{5}(4-u_n)$ ..... (1.5 pts)
4. Déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})$, $0<4-u_n<\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$ ..... (1 pt)
5. Montrez que la suite (u_n) est convergente en déterminant sa limite . ..... (1 pt)
6. On pose : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ v_n=\dfrac{u_n-4}{u_n-2}$
   a) Exprimez v_{n+1} en fonction de u_n ..... (0.5 pt)
   b) Montrez que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$. ..... (1 pt)
   c) Calculez v_0 puis exprimez v_n en fonction de n. ..... (0.75 pt)
7. Déduire u_n en fonction de n. ..... (0.75 pt)
8. On pose : $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$ montrez que $(\forall n\in\mathbb{N})$, $S_n\geq 4n-1+\dfrac{4^{n+1}}{5^n}$ ..... (1 pt)

Bon courage ! ☺