Lycée qualifiant Tariq Ben Zyad Niveau : 2 BAC-SVTF	❖ DEVOIR SURVEILLÉ N° 2 ❖ Semestre 1 – Sujet B	Professeur : Bouyguir Taher www.proftaher.com

Exercice 1 (10.5 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$

Et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans une repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$ ..... (1 pt)
2. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat. ..... (1 pt)
3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat . ..... (1 pt)
4. a) Montrer que : $(\forall x \in \mathscr{D}_f) : f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x^2}$ ..... (1 pt)
   b) En déduire que f est croissante sur $[1; +\infty[$ ..... (0.5 pt)
   c) En déduire que f est décroissante sur $]0; 1]$. ..... (0.5 pt)
   d) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathscr{D}_f$. ..... (1 pt)
5. Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ avec la droite (D) d'équation $y = 1$ . ..... (1 pt)
6. Écrire l'équation de la tangente de $(\mathscr{C}_f)$ au point $x_0 = 1$ ..... (0.5 pt)
7. Tracez soigneusement $(\mathscr{C}_f)$ et (D) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. ..... (1 pt)
8. Soit g la restriction de f sur $]0; 1]$
   a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle J à déterminer. ..... (1 pt)
   b) Tracez dans même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$. ..... (1 pt)

Exercice 2 (9.5 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}; \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}; (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1. Montrez en utilisant le récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n < 2$ ..... (1 pt)
2. Étudiez la monotone de la suite (u_n). ..... (1 pt)
3. Montrez que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < 2 - u_{n+1} < \frac{1}{2}(2 - u_n)$ ..... (1 pt)
4. Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $0 < 2 - u_n < \frac{3}{2^{n+1}}$ ..... (1 pt)
5. Montrez que la suite (u_n) est convergente en déterminant sa limite . ..... (1 pt)
6. On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}), v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2}$
   a) Exprimez v_{n+1} en fonction de u_n ..... (1 pt)
   b) Montrez que (v_n) est une suite géométrique de raison 4. ..... (0.5 pt)
   c) Calculez v_0 puis exprimez v_n en fonction de n. ..... (1 pt)
7. Déduire u_n en fonction de n. ..... (1 pt)
8. On pose : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{3}{u_k - 2}$ montrez que $(\forall n \in \mathbb{N})$, $S_n = \frac{1}{3} - \frac{4^n}{3} - n$ ..... (1 pt)

Bon courage! ☺