Problème (20 points)

Partie I

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$

1. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. ..... (1 pt)
2. Montrer que $g'(x) = \dfrac{2x^2+1}{x}$ puis dressez tableau de variations de g ..... (1.5 pts)
3. Déduire que : $(\forall x \in]0;1])$, $g(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [1;+\infty[)$, $g(x) \geq 0$ ..... (1 pt)

Partie II

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - \ln(x)}{x}$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement ..... (1 pt)
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ..... (1 pt)
3. Étudier le branches infinie de f au voisinage de $+\infty$ ..... (1.5 pts)
4. Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ avec la droite (D) d'équation $y = x$ ..... (1 pt)
5. Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[) : f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ ..... (1 pt)
6. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$ ..... (1 pt)
7. Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[) : f''(x) = \dfrac{3-2\ln(x)}{x^3}$ ..... (1 pt)
8. Étudier la convexité de f en déterminons le point d'inflexion de $(\mathscr{C}_f)$ ..... (1.5 pts)
9. a) Calculer $(xln(x))'$, $(\forall x \in]0;+\infty[)$, puis déduire une primitive S de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0;+\infty[$. (1 pt)
   b) Déterminer la primitive S qui est vérifier $S(1) = 2$ ..... (1 pt)
10. Construire (D) et $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. (On prend : $e^{\frac{3}{2}} \simeq 4.5$ et $f(e^{\frac{3}{2}}) \simeq 4$) ..... (1 pt)
11. Montrer que $(\forall x \in [1;+\infty[)$, $f(x) \leq x$ ..... (1 pt)

Partie III

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $1 \leq u_n \leq e$ ..... (1 pt)
2. Montrer que (u_n) est décroissante. ..... (1 pt)
3. Déduire que (u_n) est convergente. ..... (0.5 pt)
4. Calculez la limite de u_n ..... (1 pt)

Bon courage! ☺