Exercice 1 (7 points)

1. Calculer directement les intégrales : (1 × 3 Pts)

$$A=\int_{-1}^{1} x^2|x|\,dx \qquad B=\int_{1}^{2}\frac{x^2+x+2}{x^3+2x^2}dx \qquad L=\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+e^{-x}}dx$$

2. On pose : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{1-x}\cos(x)dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{1-x}\sin(x)dx$
   a) En utilisant l'intégration par partie sur I, montrer que : $I=e-J$ ..... (1 pt)
   b) En utilisant l'intégration par partie sur J, montrer que : $J=I-1$. ..... (1 pt)
   c) En déduire la valeur de I et J ..... (1 pt)
3. Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par : $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$. Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $\mathscr{C}_g$ autour de la l'axe des abscisses un tour complet. ..... (1 pt)

Exercice 2 (4.5 points)

1. a) Résoudre l'équation différentielle (1) : $y''+5y'+6y=0$ ..... (1 pt)
   b) Déterminer la solution g de (1) telle que $g(0)=1$ et $g'(0)=-1$ ..... (1 pt)
2. a) Résoudre l'équation différentielle (2) : $y''-4y'+3y=0$ ..... (1 pt)
   b) Déterminer la solution f de (2) telle que la courbe de f admet une tangente au point d'abscisse 0 ; d'équation : $y=3x-1$ ..... (1.5 pts)

Exercice 3 (8.5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère les points $A(1,1,0)$; $B(2,0,-2)$ et $C(1,2,1)$ on note (P) le plan (ABC)

1. Vérifier que $\vec{n}(1,-1,1)$ un vecteur normal au plan (P) ..... (1 pt)
2. Donner une équation cartésienne du plan (P). ..... (1 pt)
3. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1,2,4)$ et tangente au plan (P) et soit (Q) le plan d'équation : $2x+3y+z-6=0$
4. a) Montrer que les plans (P) et (Q) sont orthogonaux. ..... (1 pt)
   b) Déterminer le rayon de la sphère (S) ..... (1 pt)
   c) Donner une équation cartésienne de la sphère (S). ..... (1 pt)
5. Soit $(\triangle)$ la droite qui passe par Ω et perpendiculaire au plan (Q)
   a) Déterminer une équation cartésienne de la droite $(\triangle)$. ..... (1 pt)
   b) Déterminer le point d'intersection de $(\triangle)$ et (Q). ..... (1 pt)
6. Montrer que le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant un cercle dont on déterminera le centre et le rayon. . (1.5 pts)

Bon courage! ☺