Lycée qualifiant Tariq Ben Zyad Niveau : 2BAC-PC	❖ DEVOIR LIBRE N° 1 ❖ 2024-2025 À rendre le 17/10/2024	Professeur : Bouyguir Taher www.proftaher.com

Exercice 1 :(4pts)

Calculer les limites suivantes : ..... (4Pts)

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt[3]{x^3-2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{2-x^3}}$; 3) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sqrt[5]{x^6}-\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{tan(x)-\sqrt{3}}{x-\frac{\pi}{3}}$

Exercice 2 :(7pts)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=]1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

1. Montrer que f est continue sur I. ..... (1Pt)
2. Calculer les limites $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ..... (1Pt)
3. **a)** Montrer que f est strictement décroissante sur I. ..... (1Pt)
   b) Dresser le tableau de variations de f. ..... (1Pt)
4. **a)** Montrez que l'équation $\dfrac{1}{x-1}=\sqrt{x}$ admet une unique solution α sur $]\dfrac{3}{2};2[$. ..... (1Pt)

   b) Donner un encadrement de α d'amplitude 125×10^{-3} ..... (1Pt)
   c) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x. ..... (1Pt)

Exercice 3 :(8pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x & si \quad x\geq0 \\ f(x)=3x^2+4x\sqrt{-x} & si \quad x<0 \end{cases}$

1. Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. ..... (1Pt)
2. Montrer que f est continue on 0. ..... (1Pt)
3. **a)** Montrer que f n'est pas dérivable à droite en 0. ..... (0.5Pt)
   b) Montrer que f est dérivable à gauche en 0 et que $f'_g(0)=0$. ..... (0.5Pt)
   c) Interpréter les résultats obtenus. ..... (0.5Pt)
4. **a)** Monter que $\forall x\in]-\infty;0[: f'(x)=6\sqrt{-x}(1-\sqrt{-x})$. ..... (0.5Pt)
   b) En déduire les variations de f sur chacun des intervalles $]-\infty;-1]$ et $[-1;0[$ ..... (0.5Pt)
5. **a)** Calculer $f'(x)$ pour tout x de $[0;+\infty[$. ..... (0.5Pt)
   b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. ..... (0.5Pt)
6. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. ..... (0.5Pt)
7. Soit g la restriction de la fonction f sur $I=[0;+\infty[$.
   a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. ..... (0.5Pt)
   b) Calculer $g(\dfrac{1}{4})$ et en déduire la valeur de $(g^{-1})'(\dfrac{1}{2})$. ..... (0.5Pt)
   c) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout x de J. ..... (1Pt)

Exercice 4 :(1pt)

Soit f une fonction définie et continue sur $[0;1]$ tel que : $f(0)=0$ et $f(1)=1$.
Montrer qu'il existe un nombre c de l'intervalle $]0;1[$ vérifiant : $f(c)=\dfrac{1-c}{1+c}$ ..... (1Pt)

Bon courage ! ☺