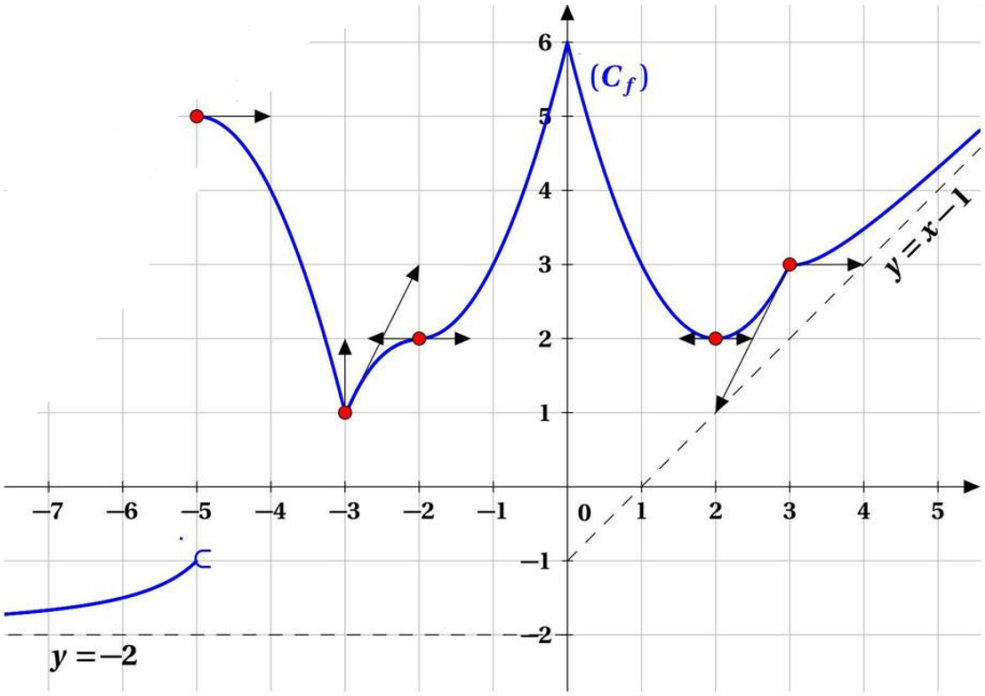
Lycée qualifiant Tariq Ben Zyad Niveau : 2BAC-PC	❖ DEVOIR LIBRE N° 2 ❖ 2024-2025 À rendre le 25/11/2024	Professeur : Bouyguir Taher www.proftaher.com

Exercice 1 :

Soit la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur $\mathbb{R}$, dont sa courbe $(\boldsymbol{C_f})$ admet 2 asymptotes d'équations : $\boldsymbol{y = x - 1}$ et $\boldsymbol{y = -2}$.

1. D'après la lecture graphique :
   a) Déterminer : $\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \lim_{x\to+\infty}(f(x)-x), \lim_{x\to+\infty}[f(x)-x+1]$.
   b) Déterminer : $f'_d(-5), \lim_{x\to-3^-} \frac{f(x)-1}{x+3}, f'_d(-3), f'(-2), \lim_{x\to0} \frac{f(x)-6}{x}, f'(2), \lim_{x\to3^-} \frac{f(x)-3}{x-3}$, $\lim_{x\to3^+} \frac{f(x)-3}{x-3}$ puis donnez une interprétation géométrique pour chaque résultat.
   c) Déterminer : $\lim_{x\to-3^+} \frac{f(x)^{2025}-1}{x+3}; \lim_{x\to-3^+} \frac{f(x)-1}{x^2-9}$
   d) Déterminer : $\lim_{x\to-3^-} \frac{\sqrt{f(x)}-1}{x+3}, \lim_{x\to-3^+} \frac{\sqrt{f(x)}-1}{x+3}$.
   e) Construire le tableau de variations de la fonction $\boldsymbol{f}$.
   f) Déterminer un point d'inflexion pour la courbe $(\boldsymbol{C_f})$.
2. Soit la fonction $\boldsymbol{g}$ définie par : $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)-1}}$
   a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\boldsymbol{g}$.
   b) Construire le tableau de variations de la fonction g.



Exercice 2 :

I)- Soit f est la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$.

1. Trouer deux nombres a et b tels que : $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2}$
   , puis Trouver la primitive de f qui vérifie $F(\frac{1}{2}) = 6$

II)- Déterminer les primitives des fonctions : $f(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$ et $g(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ et $h(x) = (3x+1)\sqrt{3x+1}$

III)- On considère la fonction P_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $(\forall n > 2)\ P_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$.

1. Déterminer la primitive F_n de P_n sur $\mathbb{R}$ qui vérifier $F_n(0) = 1$
2. Déduire une autre expression de $P_n(x)$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x\sqrt{x^2-2x}$, Et $(\mathbb{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrez que $\mathbb{D}_f =]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$ et calculer les limites aux bornes de $\mathbb{D}_f$. ..... (1.5 pts)
2. Étudiez la dérivabilité de la fonction f à gauche en 0 et à droite en 2, puis interprétez chaque résultat graphiquement. ..... (1.5 pts)
3. Montrez que : $(\forall x \in \mathbb{D}_f \setminus \{0;2\}) : f'(x) = \dfrac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}}$ ..... (1 pt)
4. Étudiez le signe de f' puis dressez le tableau de variations de la fonction f ..... (1.5 pts)
5. Étudiez les branches infinies de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$. ..... (1.5 pts)
6. Tracez soigneusement $(\mathbb{C}_f)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. ..... (1 pt)
7. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty;0]$
   a) Montrez que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera. ..... (1 pt)
   b) Vérifiez que $g^{-1}(-\sqrt{3}) = -1$ et déduire $(g^{-1})'(-\sqrt{3})$ ..... (1 pt)
   c) Tracez $\mathbb{C}_{g^{-1}}$ dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. ..... (0.5 pt)

Exercice 4 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2} \end{cases}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. a) Montrez en utilisant le récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 2 < u_n < 4$ ..... (1 pt)
   b) Étudiez la monotonie de la suite (u_n)..... (1 pt)
   c) Montrez que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < 4 - u_{n+1} < \dfrac{4}{5}(4-u_n)$ ..... (1 pt)
   d) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $0 < 4 - u_n < \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$ ..... (1 pt)
   e) Montrez que la suite (u_n) est convergente en déterminant sa limite . ..... (1 pt)
   f) On pose : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Calculer : $\lim S_n$ ..... (1 pt)
2. On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ v_n = \dfrac{u_n-4}{u_n-2}$
   a) Exprimez v_{n+1} en fonction de u_n ..... (1 pt)
   b) Montrez que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$. ..... (1 pt)
   c) Calculez v_0 puis exprimez v_n en fonction de n. ..... (1 pt)
   d) Déduire u_n en fonction de n , puis déterminer de nouveau $\lim u_n$ ..... (1pt)
   e) On pose : $T_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$. Calculer : $\lim T_n$ ..... (1 pt)
3. On considère la fonction f définie sur $I = [2;4]$ par : $f(x) = \dfrac{8(x-1)}{x+2}$.
   a) Étudiez la monotonie de la suite f sur I et en déduire que $f(I) \subset I$ . ..... (1 pt)
   b) Montrer que $\forall x \in I : f(x) \geq x$ ..... (1 pt)
   c) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 2 < u_n < 4$ ..... (1 pt)
   d) Étudiez la monotonie de la suite (u_n)..... (1 pt)
   e) Montrez que la suite (u_n) est convergente en déterminant sa limite . ..... (1 pt)

Bon courage! ☺