Lycée qualifiant Tariq Ben Zyad Niveau : 2BAC-PC	❖ DEVOIR SURVEILLÉ N° 2 ❖ 2024-2025	Professeur : Bouyguir Taher www.proftaher.com

Exercice 1 :(3.5Pts)

I)- Soit f est la fonction définie sur $I=]1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{4x^2+4x+4}{(x^2-1)^2}$.

1. Vérifier que $(x\in I)$: $f(x)=\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}$ ..... (0.5 pt)
2. Déterminer la primitive de f qui vérifie $F(2)=0$ ..... (1.5 pts)

II)- Déterminer les primitives des fonctions : $h(x)=(x^2+3)(x^3+9x-1)^4$ et $g(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+2}}$.....(1.5 pts)

Exercice 2 :(9Pts)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=\dfrac{3u_n+2}{u_n+2} \end{cases}; (n\in\mathbb{N})$

1. Montrez en utilisant la récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N}) : 0<u_n<2$ .....(1 pt)
2. Étudiez la monotonie de la suite (u_n).....(1 pt)
3. Montrez que $(\forall n\in\mathbb{N}) : 0<2-u_{n+1}<\frac{1}{2}(2-u_n)$ ..... (1 pt)
4. En déduire que $(\forall n\in\mathbb{N}) : 0<2-u_n<\dfrac{3}{2^{n+1}}$ ..... (1 pt)
5. Montrez que la suite (u_n) est convergente en déterminant sa limite . ..... (1 pt)
6. On pose $(\forall n\in\mathbb{N}) : v_n=\dfrac{u_n+1}{u_n-2}$
   a) Montrez que (v_n) est une suite géométrique de raison 4. .....(1 pt)
   b) Calculez v_0 , puis exprimez v_n et u_n en fonction de n. ..... (1.5 pts)
7. On pose :$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{3}{u_k-2}$ montrez que $(\forall n\in\mathbb{N}) : S_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{4^n}{3}-n$, puis Calculer $\lim S_n$. ..... (1.5 pts)

Exercice 3 :(7.5Pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=1-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}$, Et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$ ..... (0.5 pt)
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement les résultats . ..... (1.5 pts)
3. a) Montrer que : $(\forall x\in\mathscr{D}_f) : f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2}$ ..... (1 pt)
   b) Déterminer le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathscr{D}_f$. ..... (1.5 pts)
4. Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ avec la droite (D) d'équation $y=1$ . ..... (1 pt)
5. Tracez soigneusement $(\mathscr{C}_f)$ et (D) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. ..... (1 pt)
6. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I=]0;1]$
   a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.....(0.5 pt)
   b) Tracez soigneusement dans même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$ (avec une couleur différente)... (0.5pt)

La propreté de la feuille et la lisibilité de l'écriture seront prises en considération lors de la correction.

Bon courage! ☺