## Exercice 1 (10.5 Pts)

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x)=\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

Et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans une repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$ ..... (1 pt)
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat. ..... (1 pt)
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat . ..... (1 pt)
4. a) Montrer que : $(\forall x\in\mathscr{D}_f) : f'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x^2}$ ..... (1 pt)
   b) En déduire que $f$ est croissante sur $[1;+\infty[$ ..... (0.5 pt)
   c) En déduire que $f$ est décroissante sur $]0;1]$. ..... (0.5 pt)
   d) Dresser le tableau de variation de $f$ sur $\mathscr{D}_f$. ..... (1 pt)
5. Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ avec la droite $(D)$ d'équation $y=1$ . ..... (1 pt)
6. Écrire l'équation de la tangente de $(\mathscr{C}_f)$ au point $x_0=1$ ..... (0.5 pt)
7. Tracez soigneusement $(\mathscr{C}_f)$ et $(D)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. ..... (1 pt)
8. Soit $g$ la restriction de $f$ sur $]0;1]$
   a) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $J$ à déterminer. ..... (1 pt)
   b) Tracez dans même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$. ..... (1 pt)

## Exercice 2 (9.5 Pts)

Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0=3; \\ u_{n+1}=\dfrac{3u_n+2}{u_n+2}; (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

1. Montrez en utilisant le récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N}) : u_n>2$ ..... (1 pt)
2. Montrez que $(u_n)$ est décroissante. ..... (1 pt)
3. Montrez que : $(\forall n\in\mathbb{N})$, $u_{n+1}-2\leq\frac{1}{4}(u_n-2)$ ..... (1 pt)
4. Déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ , $0<u_n-2<\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ..... (1 pt)
5. Montrez que la suite $(u_n)$ est convergente en déterminant sa limite . ..... (1 pt)
6. On pose : $(\forall n\in\mathbb{N})$, $v_n=\frac{2-u_n}{u_n+1}$
   a) Exprimez $v_{n+1}$ en fonction de $u_n$ ..... (1 pt)
   b) Montrez que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$. ..... (0.5 pt)
   c) Calculez $v_0$ puis exprimez $v_n$ en fonction de $n$. ..... (1 pt)
7. Montrez que $u_n=\frac{2+\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}$ , $(\forall n\in\mathbb{N})$. ..... (1 pt)
8. Calculer $\lim u_n$ ..... (1 pt)

Bon courage! ☺