CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 10

Calcul intégral

2BAC PC & SVT

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$A=\int_2^0 (x^2-3)\,dx\,; \qquad B=\int_1^4 \sqrt{x}(3-x)\,dx\,; \qquad C=\int_1^4 \sqrt{x+3}\,dx\,;$$

$$D=\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{6x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx\,; \qquad E=\int_1^3 (2x-1)e^{x^2-x}\,dx\,; \qquad F=\int_0^{\ln 2} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx\,;$$

$$G=\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x-1}\,; \qquad H=\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}\,; \qquad K=\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x}|\ln x|\,dx\,;$$

$$L=\int_{-1}^{2} \left(|x|+|x^2-1|\right)dx\,; \qquad M=\int_0^{\pi} \cos x\sin^5 x\,dx\,; \qquad N=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x+\sin x)^2\,dx.$$

(Les lettres $A,\ldots,N$ sont ajoutées pour la correction.)

✔ Solution

- $A=-\displaystyle\int_0^2 (x^2-3)\,dx=-\left[\frac{x^3}{3}-3x\right]_0^2=-\left(\frac{8}{3}-6\right)=\frac{10}{3}.$
- $B=\displaystyle\int_1^4 \left(3x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\left[2x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_1^4=\left(16-\frac{64}{5}\right)-\left(2-\frac{2}{5}\right)=\frac{8}{5}.$
- $C=\left[\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{2}{3}(7\sqrt{7}-8).$
- $D=\left[6\sqrt{x^2+1}\right]_0^{2\sqrt{2}}=6(3-1)=12$ (forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, primitive $2\sqrt{u}$).
- $E=\left[e^{x^2-x}\right]_1^3=e^6-1$ (forme $u'e^u$).
- $F=\left[\ln\left(e^x+e^{-x}\right)\right]_0^{\ln 2}=\ln\left(2+\frac{1}{2}\right)-\ln 2=\ln\frac{5}{4}$ (forme $\frac{u'}{u}$, $u>0$).
- $G=\left[\ln|x-1|\right]_{-2}^{-1}=\ln 2-\ln 3=\ln\frac{2}{3}.$
- $H=\left[\ln(\ln x)\right]_e^{e^2}=\ln 2-\ln 1=\ln 2$ (forme $\frac{u'}{u}$ avec $u=\ln x>0$).
- $K=\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{-\ln x}{x}\,dx+\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx=\left[-\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^1+\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$
- L : $\displaystyle\int_{-1}^2 |x|\,dx=\int_{-1}^0 (-x)\,dx+\int_0^2 x\,dx=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}\,;$

  $$\int_{-1}^2 |x^2-1|\,dx=\int_{-1}^1 (1-x^2)\,dx+\int_1^2 (x^2-1)\,dx=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\,;$$

  donc $L=\frac{5}{2}+\frac{8}{3}=\frac{31}{6}.$
- $M=\left[\frac{\sin^6 x}{6}\right]_0^{\pi}=0.$

- $N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \sin(2x)\right) dx = \left[x - \frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} + 1.$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 3}{(x-1)^2}$.

1. Vérifier que pour tout x de $]1;+\infty[$: $f(x) = 2x - \frac{3}{(x-1)^2}$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_2^3 \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 3}{(x-1)^2}\, dx$.

Solution

1. $2x - \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{2x(x^2 - 2x + 1) - 3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 3}{(x-1)^2} = f(x)$.
2. $\int_2^3 f(x)\, dx = \left[x^2 + \frac{3}{x-1}\right]_2^3 = \left(9 + \frac{3}{2}\right) - (4 + 3) = \frac{7}{2}$.

Exercice 3

1. Déterminer les réels a et b tels que : $\frac{2x+3}{x^2+2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2}$ pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-2;0\}$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_1^2 \frac{2x+3}{x^2+2x}\, dx$.

Solution

1. $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} = \frac{(a+b)x + 2a}{x(x+2)}$: par identification $2a = 3$ et $a + b = 2$, soit $a = \frac{3}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$.
2. $\int_1^2 \frac{2x+3}{x^2+2x}\, dx = \left[\frac{3}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+2)\right]_1^2 = \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 3) = \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \sin x$.

1. Montrer que pour tout réel x : $f(x) = 2\cos x - f''(x)$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_0^{\pi} x \sin x\, dx$.

Solution

1. $f'(x) = \sin x + x\cos x$ et $f''(x) = 2\cos x - x\sin x = 2\cos x - f(x)$, d'où $f(x) = 2\cos x - f''(x)$.
2. $\int_0^{\pi} f(x)\, dx = \left[2\sin x - f'(x)\right]_0^{\pi} = \left(0 - f'(\pi)\right) - \left(0 - f'(0)\right)$; or $f'(\pi) = -\pi$ et $f'(0) = 0$: l'intégrale vaut π.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^4 x$.

1. Exprimer $\sin^2 x$ ainsi que $\cos^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$.
2. Exprimer $\sin^4 x$ en fonction de $\cos(2x)$ et $\cos(4x)$.
3. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x)\, dx$.

✔ Solution

1 $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ et $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.

2 $\sin^4 x = \dfrac{1-2\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4} = \dfrac{1}{4}\left(1-2\cos(2x)+\dfrac{1+\cos(4x)}{2}\right) = \dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{2}\cos(2x)+\dfrac{1}{8}\cos(4x)$.

3 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x)\,dx = \left[\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{32}\sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{3\pi}{64}-\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{1}{32}$.

Exercice 6

On considère les deux intégrales : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}\,dx$.

1 Calculer I.

2 Soit f la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$.

a) Montrer que $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right] : f'(x) = \dfrac{3}{\cos^4 x} - \dfrac{2}{\cos^2 x}$.

b) Montrer que : $3J - 2I = 2$.

c) En déduire la valeur de J.

✔ Solution

1 $I = \left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$.

2 a) $f'(x) = \dfrac{\cos x\cdot\cos^3 x + \sin x\cdot 3\cos^2 x\sin x}{\cos^6 x} = \dfrac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x} = \dfrac{3-2\cos^2 x}{\cos^4 x} = \dfrac{3}{\cos^4 x} - \dfrac{2}{\cos^2 x}$.

b) En intégrant sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$: $3J-2I = f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0) = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3} - 0 = \dfrac{1}{1/2} = 2$.

c) $J = \dfrac{2+2I}{3} = \dfrac{4}{3}$.

Exercice 7

1 Résoudre le système : $\begin{cases} x+y = \dfrac{\pi}{4} \\ x-y = \dfrac{1}{2}\ln 2 \end{cases}$

2 On pose : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$. a) Calculer : $I+J$ et $I-J$. b) En déduire les valeurs exactes de I et J.

✔ Solution

1 En additionnant puis en soustrayant : $x = \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\ln 2}{4}$ et $y = \dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\ln 2}{4}$.

2 a) $I+J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dx = \frac{\pi}{4}$; $I-J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx = \left[\ln(\cos x+\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$ (forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = \cos x+\sin x > 0$ sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$).

b) D'après 1 : $I = \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\ln 2}{4}$ et $J = \dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\ln 2}{4}$.

Exercice 8

En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$\int_1^e \ln x\,dx$; $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^3}\,dx$; $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$; $\int_0^{\ln 2} e^{-x}\ln(1+e^x)\,dx$.

Solution

- $u=\ln x$, $v'=1$: $\int_1^e \ln x\,dx = \Big[x\ln x\Big]_1^e - \int_1^e 1\,dx = e-(e-1)=1$.
- $u=\ln x$, $v'=x^{-3}$, $v=-\frac{1}{2x^2}$: $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \Big[-\frac{\ln x}{2x^2}\Big]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{2x^3}\,dx = -\frac{\ln 2}{8} + \Big[-\frac{1}{4x^2}\Big]_1^2 = \frac{3}{16}-\frac{\ln 2}{8}$.
- $u=x$, $v'=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $v=2\sqrt{x+1}$: $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \Big[2x\sqrt{x+1}\Big]_0^1 - \int_0^1 2\sqrt{x+1}\,dx = 2\sqrt{2} - \frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1) = \frac{4-2\sqrt{2}}{3}$.
- $u=\ln(1+e^x)$, $u'=\frac{e^x}{1+e^x}$, $v'=e^{-x}$, $v=-e^{-x}$:

  $\int_0^{\ln 2} e^{-x}\ln(1+e^x)\,dx = \Big[-e^{-x}\ln(1+e^x)\Big]_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x}\,dx = -\frac{1}{2}\ln 3 + \ln 2 + \int_0^{\ln 2} \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$.

  Or $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx = \Big[-\ln\left(1+e^{-x}\right)\Big]_0^{\ln 2} = -\ln\frac{3}{2} + \ln 2 = \ln\frac{4}{3}$. Au total : $3\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3$.

Exercice 9

En utilisant une double intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx$; $\int_1^e (\ln x)^2\,dx$; $\int_0^\pi e^x\cos x\,dx$; $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln x)\,dx$.

Solution

- $\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx = \Big[-x^2e^{-x}\Big]_0^1 + 2\int_0^1 xe^{-x}\,dx$ et $\int_0^1 xe^{-x}\,dx = \Big[-xe^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = 1-\frac{2}{e}$; donc $\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx = -\frac{1}{e}+2-\frac{4}{e} = 2-\frac{5}{e}$.
- $\int_1^e (\ln x)^2\,dx = \Big[x(\ln x)^2\Big]_1^e - 2\int_1^e \ln x\,dx = e - 2\times 1 = e-2$ (Exercice 8).
- Posons $K=\int_0^\pi e^x\cos x\,dx$ et $S=\int_0^\pi e^x\sin x\,dx$. Par parties ($u=\cos x$ puis $u=\sin x$, $v'=e^x$) : $K=\Big[e^x\cos x\Big]_0^\pi + S = -e^\pi - 1 + S$ et $S=\Big[e^x\sin x\Big]_0^\pi - K = -K$. Donc $K=-e^\pi-1-K$, soit $K=-\frac{e^\pi+1}{2}$.
- Posons $P=\int_1^{e^\pi}\sin(\ln x)\,dx$ et $Q=\int_1^{e^\pi}\cos(\ln x)\,dx$. Avec $v'=1$: $P=\Big[x\sin(\ln x)\Big]_1^{e^\pi} - Q = -Q$ et $Q=\Big[x\cos(\ln x)\Big]_1^{e^\pi} + P = -e^\pi - 1 + P$. Donc $P=e^\pi+1-P$, soit $P=\frac{e^\pi+1}{2}$.

Exercice 10

1 Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\frac{2x^2+3x}{x+2} = ax+b+\frac{c}{x+2}$ pour tout $x\neq -2$.

2 Calculer l'intégrale : $I=\int_0^2 \frac{2x^2+3x}{x+2}\,dx$.

3 Calculer l'intégrale : $J = \int_0^2 (4x+3)\ln(x+2)\,dx$.

✔ Solution

1 $2x^2+3x = (x+2)(2x-1)+2$, donc $a=2$, $b=-1$, $c=2$.

2 $I = \left[x^2 - x + 2\ln(x+2)\right]_0^2 = 2 + 2\ln 4 - 2\ln 2 = 2 + 2\ln 2$.

3 Par parties : $u = \ln(x+2)$, $u' = \frac{1}{x+2}$, $v' = 4x+3$, $v = 2x^2+3x$: $J = \left[(2x^2+3x)\ln(x+2)\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{2x^2+3x}{x+2}\,dx = 14\ln 4 - I = 26\ln 2 - 2$.

Exercice 11

1 Montrer que : $\frac{9}{4} \leq \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx \leq 9$.

2 Montrer que : $1 \leq \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \leq 2$.

3 Montrer que : $0 \leq \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx \leq \frac{\pi}{2} - 1$.

✔ Solution

On utilise : si $m \leq f \leq M$ sur $[a;b]$ $(a \leq b)$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

1 Sur $[0;9]$: $1 \leq 1+\sqrt{x} \leq 4$, donc $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+\sqrt{x}} \leq 1$; d'où $\frac{9}{4} \leq \int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \leq 9$.

2 Sur $[-1;1]$: $1 \leq 1+x^2 \leq 2$, donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$; d'où $\frac{1}{2}\times 2 \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} \leq 1\times 2$.

3 Sur $\left[1;\frac{\pi}{2}\right]$: $0 \leq \sin x \leq 1$ et $x \geq 1$, donc $0 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$; d'où $0 \leq \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx \leq \frac{\pi}{2} - 1$.

Exercice 12

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n e^x\,dx$.

1 Calculer I_1.

2 À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

3 Calculer I_2 et I_3.

4 Déduire la valeur de l'intégrale : $I = \int_0^1 (x^3+2x^2-2x)e^x\,dx$.

✔ Solution

1 $I_1 = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - (e-1) = 1$.

2 $u = x^{n+1}$, $u' = (n+1)x^n$, $v' = v = e^x$: $I_{n+1} = \left[x^{n+1}e^x\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx = e - (n+1)I_n$.

3 $I_2 = e - 2I_1 = e-2$; $I_3 = e - 3I_2 = 6 - 2e$.

4 Par linéarité : $I = I_3 + 2I_2 - 2I_1 = (6-2e) + (2e-4) - 2 = 0$.

Exercice 13

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n\,dx$.

1. Calculer $I_0 = \int_1^e x^2\,dx$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $I_1 = \dfrac{2e^3+1}{9}$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$.
4. En déduire I_2.
5. Démontrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : I_n \geq 0$.
6. Déduire de la question 3 que pour tout entier naturel n non nul, on a : $I_n \leq \dfrac{e^3}{n+1}$.
7. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Solution

1. $I_0 = \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_1^e = \dfrac{e^3-1}{3}$.
2. $u = \ln x$, $v' = x^2$, $v = \frac{x^3}{3}$: $I_1 = \left[\dfrac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \dfrac{x^2}{3}\,dx = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{e^3-1}{9} = \dfrac{2e^3+1}{9}$.
3. $u = (\ln x)^{n+1}$, $u' = \frac{(n+1)(\ln x)^n}{x}$, $v = \frac{x^3}{3}$: $I_{n+1} = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{n+1}{3}I_n$, soit $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$.
4. Avec $n = 1$: $3I_2 = e^3 - 2I_1 = e^3 - \dfrac{4e^3+2}{9}$, donc $I_2 = \dfrac{5e^3-2}{27}$.
5. Sur $[1;e]$: $\ln x \geq 0$, donc $x^2(\ln x)^n \geq 0$ et, comme $1 \leq e$, $I_n \geq 0$.
6. $(n+1)I_n = e^3 - 3I_{n+1} \leq e^3$ car $I_{n+1} \geq 0$; donc $I_n \leq \dfrac{e^3}{n+1}$.
7. $0 \leq I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$ et $\frac{e^3}{n+1} \to 0$: par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 14

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$.

1. Montrer que : $I_1 = 2\ln 2 - 1$.
2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 \leq I_n \leq \ln 2$.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
4. En déduire que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \ln(1+x) - x$.

5. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$, puis déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$: $\ln(1+x^n) \leq x^n$.
7. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Solution

1. Par parties ($u = \ln(1+x)$, $v' = 1$, $v = x+1$) : $I_1 = \left[(x+1)\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 1\,dx = 2\ln 2 - 1$.
2. Sur $[0;1]$: $0 \leq x^n \leq 1$, donc $0 \leq \ln(1+x^n) \leq \ln 2$; en intégrant sur $[0;1]$: $0 \leq I_n \leq \ln 2$.

3 Sur $[0;1]$: $x^{n+1} \leq x^n$, donc $\ln(1+x^{n+1}) \leq \ln(1+x^n)$; ainsi $I_{n+1} \leq I_n$.

4 (I_n) est décroissante et minorée par 0 : elle converge.

5 $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x} \leq 0$: f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et $f(0) = 0$, donc $f(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

6 Pour $x \geq 0$, $x^n \geq 0$ et $f(x^n) \leq 0$: $\ln(1+x^n) \leq x^n$.

7 $0 \leq I_n \leq \displaystyle\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$: par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.