CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 1

2BAC PC & SVT

Continuité d'une fonction numérique

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Exercice 1

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 3}{x - 3} \ ; \ x \neq 3 \\ f(3) = 5 \end{cases}$

Montrer que f est continue en 3.

Solution

Le trinôme $2x^2 - 7x + 3$ s'annule en 3 : $2x^2 - 7x + 3 = (x-3)(2x-1)$. Donc, pour $x \neq 3$: $f(x) = 2x - 1$.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (2x - 1) = 5 = f(3).$$

Donc f est continue en 3.

Exercice 2

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^4 - 1} \ ; \ x \neq 1 \\ f(1) = \dfrac{-1}{4} \end{cases}$

f est-elle continue en 1 ?

Solution

$x^2 - x = x(x-1)$ et $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$. Pour $x \notin \{-1; 1\}$:

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)(x^2+1)} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}.$$

Comme $\dfrac{1}{4} \neq -\dfrac{1}{4} = f(1)$, la fonction f n'est pas continue en 1.

Exercice 3

f est la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{3 - x}{\sqrt{x+1} - 2} \ ; \ x \neq 3 \\ f(3) = -4 \end{cases}$

1. Montrer que, pour tout x de $[-1; 3[\cup]3; +\infty[$: $\dfrac{3 - x}{\sqrt{x+1} - 2} = -\sqrt{x+1} - 2$.
2. Étudier la continuité de f en 3.

Solution

1. Pour $x \in [-1; 3[\cup]3; +\infty[$, on multiplie par l'expression conjuguée :

$$\frac{3 - x}{\sqrt{x+1} - 2} = \frac{(3-x)\left(\sqrt{x+1} + 2\right)}{(x+1) - 4} = \frac{(3-x)\left(\sqrt{x+1} + 2\right)}{x - 3} = -\sqrt{x+1} - 2.$$

2. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \left(-\sqrt{x+1} - 2\right) = -\sqrt{4} - 2 = -4 = f(3)$. Donc f est continue en 3.

Exercice 4

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-x} \ ; \ x \neq 1 \\ f(1) = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$

Étudier la continuité de f en 1.

Solution

Pour $x \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$:

$$f(x) = \frac{(x^2+3)-4}{x(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \frac{x+1}{x\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{2}{1\times(2+2)} = \dfrac{1}{2} \neq -\dfrac{1}{2} = f(1)$: f n'est pas continue en 1.

Exercice 5

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 2 \\ f(x) = \dfrac{4}{x^2} & \text{si } x < 2 \end{cases}$

Étudier la continuité de f en 2.

Solution

$f(2) = \sqrt{2-1} = 1$.

- À droite : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x-1} = 1 = f(2)$.
- À gauche : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{4}{4} = 1 = f(2)$.

f est continue à droite et à gauche en 2, donc continue en 2.

Exercice 6

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2-2x-3} & \text{si } x < -1 \\ f(x) = \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

f est-elle continue en -1 ?

Solution

$f(-1) = \sqrt{0} = 0$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \sqrt{x+1} = 0 = f(-1)$.

Pour $x < -1$: $x^2-2x-3 = (x+1)(x-3)$, donc $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{(x+1)(x-3)} = \dfrac{x+1}{x-3}$ et

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \frac{0}{-4} = 0 = f(-1).$$

f est continue à droite et à gauche en -1 : oui, f est continue en -1.

Exercice 7

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3-1}{\sqrt{x}-1} & \text{si } x > 1 \\ f(x) = mx^2+1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

Déterminer le réel m pour que f soit continue en 1.

✔ Solution

$f(1) = m+1$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = m+1$.

Pour $x > 1$: $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ et $x - 1 = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$, donc

$$f(x) = (\sqrt{x}+1)(x^2+x+1) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2\times 3 = 6.$$

f est continue en $1 \iff m+1 = 6 \iff m = 5$.

Exercice 8

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+7}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue en 1.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

✔ Solution

1. $f(1) = \dfrac{8}{2} = 4$; $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+7}{x+1} = 4$. Pour $x < 1$: $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$ donc $f(x) = x+3$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 4$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$: f est continue en 1.
2. Sur $]1;+\infty[$, f est une fonction rationnelle dont le dénominateur $x+1$ ne s'annule pas : elle y est continue. Sur $]-\infty;1[$, $f(x) = x+3$ (polynôme) : continue. Avec la continuité en 1, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{si } x > 1 \\ f(x) = \dfrac{8}{x^2+1} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

✔ Solution

- Sur $]-\infty;1[$: f est rationnelle et $x^2+1 > 0$, donc continue.
- Sur $]1;+\infty[$: $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue et $\sqrt{x}-1 \neq 0$, donc f est continue (quotient).
- En 1 : $f(1) = \dfrac{8}{2} = 4$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 4$. Pour $x > 1$: $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1} = (\sqrt{x}+1)(x+1)$, donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2\times 2 = 4$.

f est continue en 1 ; finalement f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+1}{3-x} & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = 1-ax^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty;2]$ et sur $]2;+\infty[$.
2. Déterminer le réel a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

✔ Solution

1. Sur $]-\infty;2]$: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{3-x}$ est rationnelle et $3-x > 0$ pour $x \leq 2$: f est continue sur $]-\infty;2]$.

Sur $]2;+\infty[$: $f(x)=1-ax^2$ est un polynôme : continue.

2 D'après 1), f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue à droite en 2. $f(2)=\dfrac{5}{1}=5$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1-4a$. Donc $1-4a=5 \iff a=-1$.

Exercice 11

f est une fonction définie et continue sur les deux intervalles $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$, dont le tableau de variations est :

x	$-\infty$		-4		-3		1		4		5		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	0	↗	2	↘	$+\infty$	↘	-1	↗	2	↗	3

Déterminer les images par f des intervalles : $]-\infty;-3]$; $[5;+\infty[$; $[-3;1[$; $]1;4]$ et $]1;+\infty[$.

Solution

On utilise la continuité et la stricte monotonie de f sur chaque intervalle :

- f strictement croissante sur $]-\infty;-3]$: $f\big(]-\infty;-3]\big)=\big]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);f(-3)\big]=]-\infty;2]$.
- f strictement croissante sur $[5;+\infty[$: $f\big([5;+\infty[\big)=\big[f(5);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\big[=[2;3[$.
- f strictement décroissante sur $[-3;1[$: $f\big([-3;1[\big)=\big]\lim\limits_{x\to1^-} f(x);f(-3)\big]=]-\infty;2]$.
- f strictement décroissante sur $]1;4]$: $f\big(]1;4]\big)=\big[f(4);\lim\limits_{x\to1^+} f(x)\big[=[-1;+\infty[$.
- $f\big(]1;+\infty[\big)=f\big(]1;4]\big)\cup f\big([4;+\infty[\big)=[-1;+\infty[\cup[-1;3[=[-1;+\infty[$.

Exercice 12

g est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, dont le tableau de variations est :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
g	6	↘	4	↘	3	↗	$+\infty$

1 Déterminer les images par g des intervalles : $]-\infty;2]$; $[2;+\infty[$ et $[-2;2]$.

2 Déterminer le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Solution

1 g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;2]$, strictement croissante sur $[2;+\infty[$:

- $g\big(]-\infty;2]\big)=\big[g(2);\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\big[=[3;6[$;
- $g\big([2;+\infty[\big)=\big[g(2);\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\big[=[3;+\infty[$;
- $g\big([-2;2]\big)=\big[g(2);g(-2)\big]=[3;4]$.

2 $g(\mathbb{R})=[3;6[\cup[3;+\infty[=[3;+\infty[$: pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)\geq 3>0$. Donc g est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13

h est une fonction continue sur l'intervalle $]-\infty;6]$, dont le tableau de variations est :

x	$-\infty$		-2		6
h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-4

1. Déterminer l'image de l'intervalle $]-\infty;6]$ par la fonction h.
2. Déterminer le signe de la fonction h sur $]-\infty;6]$.

Solution

1. h est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;6]$: $h\big(]-\infty;6]\big) = \big[h(6);\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)\big[= [-4;+\infty[$.
2. h est strictement décroissante et $h(-2)=0$, donc :
   - si $x<-2$: $h(x)>h(-2)=0$;
   - $h(-2)=0$;
   - si $-2<x\leq 6$: $h(x)<0$.

Exercice 14

Le tableau de variations ci-dessous est celui d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[-3;2]$.

x	-3		0		2
f	2	$\searrow$	1	$\searrow$	-2

1. Expliquer pourquoi il existe un réel unique $\alpha\in]-3;0[$ tel que $f(\alpha)=1{,}5$.
2. Expliquer pourquoi l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution β, telle que $\beta\in]0;2[$.

Solution

D'après le tableau, f est continue et strictement décroissante sur $[-3;2]$.

1. f est continue et strictement décroissante sur $[-3;0]$, donc $f\big([-3;0]\big)=[f(0);f(-3)]=[1;2]$. Comme $1{,}5\in]1;2[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (cas strictement monotone), il existe un unique $\alpha\in]-3;0[$ tel que $f(\alpha)=1{,}5$.
2. Sur $[-3;0]$: $f(x)\geq 1>0$, donc l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution dans $[-3;0]$. Sur $[0;2]$: f est continue et strictement décroissante et $f\big([0;2]\big)=[-2;1]\ni 0$, avec $f(0)=1\neq 0$ et $f(2)=-2\neq 0$. Donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution β sur $[-3;2]$, et $\beta\in]0;2[$.

Exercice 15

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution sur l'intervalle I :

1. $f(x)=x^3-2x^2+x+2$; $I=\left]-1;\frac{-1}{2}\right[$
2. $f(x)=x^4+2x^3-3$; $I=]-2;2[$
3. $f(x)=\sqrt{x^3+1}-2x$; $I=]0;1[$

Solution

Dans chaque cas, f est continue sur l'intervalle fermé correspondant et f change de signe aux bornes ; le théorème des valeurs intermédiaires donne au moins une solution dans I.

1. f est un polynôme, continue sur $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$. $f(-1)=-1-2-1+2=-2<0$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+2=\frac{7}{8}>0$.
2. f est un polynôme, continue sur $[-2;2]$. $f(-2)=16-16-3=-3<0$ et $f(2)=16+16-3=29>0$.
3. Pour $x\in[0;1]$, $x^3+1>0$, donc f est continue sur $[0;1]$ (composée et somme de fonctions continues). $f(0)=1>0$ et $f(1)=\sqrt{2}-2<0$.

Exercice 16

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle I :

1. $f(x)=\cos x-x$; $I=\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$
2. $f(x)=-x^5-x+3$; $I=\left]1;\frac{3}{2}\right[$
3. $f(x)=x^2+x-\frac{1}{x}-10$; $I=]2;3[$

Solution

Dans chaque cas : f continue, strictement monotone sur l'intervalle fermé, et f change de signe aux bornes $\Rightarrow$ solution unique dans I.

1. f est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Sur cet intervalle, $x\mapsto\cos x$ et $x\mapsto -x$ sont strictement décroissantes, donc f est strictement décroissante. $f(0)=1>0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}<0$.
2. f est continue et strictement décroissante sur $\left[1;\frac{3}{2}\right]$ (somme de $-x^5$ et $-x$, strictement décroissantes). $f(1)=-1-1+3=1>0$ et $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{243}{32}-\frac{3}{2}+3=-\frac{195}{32}<0$.
3. f est continue sur $[2;3]$ et strictement croissante (somme de x^2, x et $-\frac{1}{x}$, strictement croissantes sur $]0;+\infty[$). $f(2)=4+2-\frac{1}{2}-10=-\frac{9}{2}<0$ et $f(3)=9+3-\frac{1}{3}-10=\frac{5}{3}>0$.

Exercice 17

Montrer que l'équation $\sqrt{x}=\dfrac{5}{x-2}$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]4;5[$.

Solution

Pour $x\in[4;5]$, posons $g(x)=\sqrt{x}-\dfrac{5}{x-2}$; l'équation équivaut à $g(x)=0$.

- g est continue sur $[4;5]$ (car $x-2\neq 0$).
- $x\mapsto\sqrt{x}$ est strictement croissante et $x\mapsto\frac{5}{x-2}$ est strictement décroissante sur $[4;5]$, donc g est strictement croissante.
- $g(4)=2-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}<0$ et $g(5)=\sqrt{5}-\frac{5}{3}>0$ (car $\sqrt{5}>2>\frac{5}{3}$).

D'après le T.V.I., l'équation admet une unique solution $\alpha\in]4;5[$.

Exercice 18

1. Montrer que l'équation $2x^3+3x^2=2$ a une solution unique α sur l'intervalle $]0;1[$.
2. Donner un encadrement de α d'amplitude 25×10^{-2}.

Solution

1. Posons $f(x)=2x^3+3x^2-2$. f est continue sur $[0;1]$ et $f'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)>0$ sur $]0;1]$, donc f est strictement croissante sur $[0;1]$. $f(0)=-2<0$ et $f(1)=3>0$: l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in]0;1[$.
2. Dichotomie :
   - $f(0{,}5)=2(0{,}125)+3(0{,}25)-2=-1<0$, donc $0{,}5<\alpha<1$;
   - $f(0{,}75)=2(0{,}421875)+3(0{,}5625)-2=0{,}53125>0$, donc $\boxed{0{,}5<\alpha<0{,}75}$ (amplitude $0{,}25$).

Exercice 19

f est la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par : $f(x)=x^2-4x+3$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
2. Montrer que : $\forall x\in J : f^{-1}(x)=2+\sqrt{x+1}$.

Solution

1. $f(x)=(x-2)^2-1$. f est continue (polynôme). Si $2\leq a<b$: $0\leq a-2<b-2$, donc $(a-2)^2<(b-2)^2$ et $f(a)<f(b)$: f est strictement croissante sur $I=[2;+\infty[$. Elle admet donc une fonction réciproque définie sur $J=f(I)=\left[f(2);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[=[-1;+\infty[$.
2. Soient $x\in J$ et $y\in I$:

$$f(y)=x \iff (y-2)^2=x+1 \iff y-2=\sqrt{x+1}\ (\text{car } y-2\geq 0) \iff y=2+\sqrt{x+1}.$$

Donc $\forall x\in[-1;+\infty[: f^{-1}(x)=2+\sqrt{x+1}$.

Exercice 20

f est la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;1[$.
   a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.
   b) Montrer que : $\forall x\in J : h^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$.

Solution

1. $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
2. a) $2x+3=2(x-1)+5$, donc $h(x)=2+\dfrac{5}{x-1}$. Sur $]-\infty;1[$, $x\mapsto x-1$ est strictement croissante et strictement négative, donc $x\mapsto\frac{5}{x-1}$ est strictement décroissante : h est continue (rationnelle) et strictement décroissante sur $]-\infty;1[$. $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to1^-}h(x)=-\infty$ (car $x-1\to0^-$). Donc h admet une réciproque définie sur $J=]-\infty;2[$.

   b) Soient $x\in J$ et $y\in]-\infty;1[$:

$$h(y)=x \iff \frac{5}{y-1}=x-2 \iff y-1=\frac{5}{x-2} \iff y=\frac{x-2+5}{x-2}=\frac{x+3}{x-2}.$$

($x\neq2$ car $x<2$.) Donc $\forall x\in]-\infty;2[: h^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$.

Exercice 21

f est une fonction définie par : $f(x)=\sqrt{2x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
3. Montrer que : $\forall x\in J : f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-1}{2}$.

Solution

1. $x\in\mathcal{D}_f \iff 2x+1\geq0 \iff x\geq-\frac{1}{2}$. Donc $\mathcal{D}_f=\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

2 f est continue (composée de $x \mapsto 2x+1$ et de $\sqrt{\ }$) et strictement croissante (composée de deux fonctions strictement croissantes). $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: f admet une réciproque définie sur $J = [0;+\infty[$.

3 Soient $x \in J$ et $y \in \mathcal{D}_f$: $f(y) = x \iff \sqrt{2y+1} = x \iff 2y+1 = x^2$ (car $x \geq 0$) $\iff y = \dfrac{x^2-1}{2}$. Donc $\forall x \in [0;+\infty[: f^{-1}(x) = \dfrac{x^2-1}{2}$.

Exercice 22

f est la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \ ; \ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Montrer que f est continue en 0.

Solution

Pour $x \in [-1;1] \setminus \{0\}$:

$$f(x) = \frac{\sin x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{(1+x)-(1-x)} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$: $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1 = f(0)$. Donc f est continue en 0.

Exercice 23

1 a) Montrer que l'équation $x^5+8x^3-8=0$ admet une solution unique α sur $]0;1[$.

b) Vérifier que : $\sqrt[3]{\alpha^2+8} = \dfrac{2}{\alpha}$.

2 f est la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{x^2+8} \ ; \ x \leq \alpha \\ f(x) = \dfrac{2}{x} \ ; \ x > \alpha \end{cases}$

Étudier la continuité de f en α.

Solution

1 a) Posons $g(x) = x^5+8x^3-8$. g est continue et strictement croissante sur $[0;1]$ (somme de fonctions strictement croissantes sur $[0;+\infty[$). $g(0) = -8 < 0$ et $g(1) = 1 > 0$: l'équation admet une unique solution $\alpha \in]0;1[$.

b) $\alpha^5+8\alpha^3 = 8 \iff \alpha^3(\alpha^2+8) = 8 \iff \alpha^2+8 = \dfrac{8}{\alpha^3} = \left(\dfrac{2}{\alpha}\right)^3$. Comme $\alpha^2+8 > 0$ et $\dfrac{2}{\alpha} > 0$: $\sqrt[3]{\alpha^2+8} = \dfrac{2}{\alpha}$.

2 $f(\alpha) = \sqrt[3]{\alpha^2+8} = \dfrac{2}{\alpha}$ (d'après 1.b).

- À gauche : $x \mapsto \sqrt[3]{x^2+8}$ est continue ($x^2+8>0$), donc $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x) = \sqrt[3]{\alpha^2+8} = f(\alpha)$.
- À droite : $\lim\limits_{x\to\alpha^+} \dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{\alpha} = f(\alpha)$.

Donc f est continue en α.

Exercice 24

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a;b]$ à valeurs dans $[a;b]$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$.

Solution

Posons $g(x) = f(x) - x$; g est continue sur $[a;b]$. Comme $f(a) \in [a;b]$ et $f(b) \in [a;b]$:

$$g(a) = f(a) - a \geq 0 \qquad \text{et} \qquad g(b) = f(b) - b \leq 0.$$

- Si $g(a) = 0$ ou $g(b) = 0$, alors a ou b est solution.
- Sinon $g(a) > 0 > g(b)$ et, d'après le T.V.I., il existe $c \in]a;b[$ tel que $g(c) = 0$.

Dans tous les cas, l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[a;b]$.

Exercice 25

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0;1]$ telle que : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe un nombre c de l'intervalle $]0;1[$ vérifiant : $f(c) = \dfrac{1-c}{1+c}$.

Solution

Posons $h(x) = f(x) - \dfrac{1-x}{1+x}$; h est continue sur $[0;1]$ $(1 + x \neq 0)$. $h(0) = 0 - 1 = -1 < 0$ et $h(1) = 1 - 0 = 1 > 0$. D'après le T.V.I., il existe $c \in]0;1[$ tel que $h(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = \dfrac{1-c}{1+c}$.

Exercice 26

Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants :

- $\sqrt[4]{5}$; $\sqrt[3]{4}$ et $\sqrt{3}$
- $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$ et $\sqrt{\sqrt[3]{6}}$

Solution

La fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$: on compare des nombres positifs en les élevant à une même puissance.

- Puissance 12 : $\left(\sqrt[4]{5}\right)^{12} = 5^3 = 125$; $\left(\sqrt[3]{4}\right)^{12} = 4^4 = 256$; $\left(\sqrt{3}\right)^{12} = 3^6 = 729$. Donc $\sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{4} < \sqrt{3}$.
- $\sqrt{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[6]{6}$. Puissance 6 : $\left(\sqrt{2}\right)^6 = 8$; $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6 = 9$; $\left(\sqrt[6]{6}\right)^6 = 6$. Donc $\sqrt{\sqrt[3]{6}} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.

Exercice 27

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{16}} \times \sqrt[3]{2}}}{\sqrt[4]{8} \times \sqrt[12]{2}}$$

$$B = \frac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt{\sqrt[3]{3\sqrt[3]{9}}}}{\sqrt[6]{81} \times \sqrt[3]{\sqrt{9}}}$$

$$C = \sqrt{2} \times \left(\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}} - \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\right)$$

Solution

On écrit chaque racine comme une puissance rationnelle.

- $\sqrt{\sqrt{\sqrt{16}}} = 16^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{8} = 2^{\frac{3}{4}}$, $\sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$:

$$A = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}-\frac{1}{12}} = 2^{\frac{6+4-9-1}{12}} = 2^0 = \boxed{1}.$$

- $\sqrt[4]{9} = 3^{\frac{1}{2}}$; $3\sqrt[3]{9} = 3^{1+\frac{2}{3}} = 3^{\frac{5}{3}}$, donc $\sqrt{\sqrt[3]{3\sqrt[3]{9}}} = 3^{\frac{5}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{18}}$; $\sqrt[6]{81} = 3^{\frac{4}{6}} = 3^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{9}} = \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$:

$$B = 3^{\frac{1}{2}+\frac{5}{18}-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{9+5-12-6}{18}} = 3^{-\frac{2}{9}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt[9]{9}}}.$$

- $7+4\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^2$ et $7-4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2$, avec $2\pm\sqrt{3} > 0$, donc $\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ et $\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$. Or $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{8+2\sqrt{12}}{4} = 2+\sqrt{3}$ et $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2-\sqrt{3}$ (nombres positifs), d'où

$$C = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\times\sqrt{2} = \boxed{2}.$$

Exercice 28

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 1 + \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x} \ ; \ x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f.
2. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Étudier la continuité de f en 0.

✔ Solution

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 > 0$; f est définie pour $x \neq 0$ par la formule et en 0 par $f(0) = 2$: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Pour $x > 0$: $\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x} = \sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x^3}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{1}{x} \to 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1+0-0 = 1$.
3. Posons $a = \sqrt[3]{x^2+1}$. Comme $a^3-1 = (a-1)(a^2+a+1)$:

$$\frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x} = \frac{(x^2+1)-1}{x\,(a^2+a+1)} = \frac{x}{a^2+a+1}.$$

Quand $x \to 0$, $a \to 1$, donc cette quantité tend vers $\dfrac{0}{3} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1 \neq 2 = f(0)$. f n'est pas continue en 0.

Exercice 29

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
$x^3+8=0$; $x^6-3x^3-4=0$; $\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}=0$;
$\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = \sqrt[6]{x}$; $\sqrt[3]{(3+x)^2}+\sqrt[3]{(3-x)^2} = 2\sqrt[3]{9-x^2}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
$\sqrt[3]{x+5} < 2$; $\sqrt[3]{x^2-8} \leq x-2$.

✔ Solution

Rappel : $\sqrt[n]{a}$ n'est défini que pour $a \geq 0$; pour $a, b \geq 0$: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \iff a = b$ et $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \iff a < b$.

1. ■ $x^3+8=0 \iff x^3 = -8$; 3 est impair, donc $x = -\sqrt[3]{8} = -2$. $\boxed{S = \{-2\}}$.

- Posons $t = x^3$: $t^2 - 3t - 4 = 0 \iff (t-4)(t+1) = 0 \iff t = 4$ ou $t = -1$. $x^3 = 4 \iff x = \sqrt[3]{4}$; $x^3 = -1 \iff x = -1$. $\boxed{S = \left\{-1; \sqrt[3]{4}\right\}}$.
- Il faut $x \geq 0$. Posons $t = \sqrt[6]{x} \geq 0$: $\sqrt[3]{x} = t^2$ et $\sqrt{x} = t^3$. $t^2 - t^3 = 0 \iff t^2(1-t) = 0 \iff t = 0$ ou $t = 1 \iff x = 0$ ou $x = 1$. $\boxed{S = \{0; 1\}}$.
- Il faut $x \geq 0$ et $1 - \sqrt{x} \geq 0$, soit $x \in [0; 1]$. Les deux membres étant positifs, on élève à la puissance 6 : $(1-\sqrt{x})^2 = x$. Avec $u = \sqrt{x} \in [0; 1]$: $(1-u)^2 = u^2 \iff 1 - 2u = 0 \iff u = \frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{4}$. Vérification : $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$. $\boxed{S = \left\{\frac{1}{4}\right\}}$.
- Il faut $9 - x^2 \geq 0$, soit $x \in [-3; 3]$ (alors $3 + x \geq 0$ et $3 - x \geq 0$). Posons $a = \sqrt[3]{3+x}$ et $b = \sqrt[3]{3-x}$; alors $\sqrt[3]{9-x^2} = ab$ et l'équation s'écrit $a^2 + b^2 = 2ab \iff (a-b)^2 = 0 \iff a = b \iff 3 + x = 3 - x \iff x = 0$. $\boxed{S = \{0\}}$.

2

- Il faut $x + 5 \geq 0$. $\sqrt[3]{x+5} < 2 = \sqrt[3]{8} \iff x + 5 < 8 \iff x < 3$. $\boxed{S = [-5; 3[}$.
- Il faut $x^2 - 8 \geq 0$, soit $x \leq -2\sqrt{2}$ ou $x \geq 2\sqrt{2}$. Le premier membre est positif, donc il faut aussi $x - 2 \geq 0$: finalement $x \geq 2\sqrt{2}$. Pour $x \geq 2\sqrt{2}$, les deux membres sont positifs :

$$\sqrt[3]{x^2-8} \leq x - 2 \iff x^2 - 8 \leq (x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \iff x(x-3)(x-4) \geq 0.$$

Pour $x \geq 2\sqrt{2} > 0$: $(x-3)(x-4) \geq 0 \iff x \leq 3$ ou $x \geq 4$. $\boxed{S = \left[2\sqrt{2}; 3\right] \cup [4; +\infty[}$.

Exercice 30

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} \; ; \quad \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x+56} - 4}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x + 1}}{x} \; ; \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 3} - 2\sqrt[3]{x^3 + 1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - x$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$$

✔ Solution

On utilise $a - b = \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$.

1 Avec $a = \sqrt[3]{x}$: $x - 1 = a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$, donc $\dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \dfrac{1}{a^2 + a + 1} \xrightarrow[x\to 1]{} \dfrac{1}{3}$.

2 Avec $a = \sqrt[3]{x} \to 2$ et $b = \sqrt[3]{x+56} \to 4$: $\sqrt[3]{x} - 2 = \dfrac{x-8}{a^2 + 2a + 4}$ et $\sqrt[3]{x+56} - 4 = \dfrac{x-8}{b^2 + 4b + 16}$, donc

$$\frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x+56} - 4} = \frac{b^2 + 4b + 16}{a^2 + 2a + 4} \xrightarrow[x\to 8]{} \frac{48}{12} = 4.$$

3 Pour $x > 0$: $\dfrac{\sqrt[3]{x^3 + x + 1}}{x} = \sqrt[3]{1 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

4 $\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x}}} - 1\right) = \sqrt{x}\left(\sqrt[3]{\sqrt{x} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}} - 1\right)$. Le facteur entre parenthèses tend vers $+\infty$: la limite est $+\infty$.

5 $\sqrt[3]{x^3+x+3}-2\sqrt[3]{x^3+1}=x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}-2\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}\right)$; la parenthèse tend vers $1-2=-1$: la limite est $-\infty$.

6 Avec $a=\sqrt[3]{x^3+x+1}$ et $b=x$: $a-x=\dfrac{x+1}{a^2+ax+x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\left(\frac{a}{x}\right)^2+\frac{a}{x}+1}$. Or $\dfrac{a}{x}\to 1$ (question 3), donc la limite est $\dfrac{0}{3}=0$.

7 $\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2-1}=\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right)+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$.

- Avec $a=\sqrt[3]{x^3+1}$: $a-x=\dfrac{1}{a^2+ax+x^2}\to 0$.
- $x-\sqrt{x^2-1}=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\to 0$.

La limite est 0.

Exercice 31

Soit f la fonction définie sur $I=]2;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$.

1 Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

2 Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

3 Calculer $\sqrt{\dfrac{f^{-1}(x)+2}{f^{-1}(x)-2}}$ pour tout x de J.

✔ Solution

1 $\dfrac{x+2}{x-2}=1+\dfrac{4}{x-2}$: sur I, cette fonction est continue, strictement décroissante et strictement positive. Comme $\sqrt{\ }$ est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$, f est continue et strictement décroissante sur I. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\sqrt{1}=1$. Donc f admet une réciproque définie sur $J=f(I)=]1;+\infty[$.

2 Soient $x\in J$ et $y\in I$:

$$f(y)=x \iff 1+\frac{4}{y-2}=x^2 \iff y-2=\frac{4}{x^2-1} \iff y=\frac{2x^2+2}{x^2-1}.$$

($x^2-1>0$ car $x>1$.) Donc $\forall x\in]1;+\infty[$: $f^{-1}(x)=\dfrac{2(x^2+1)}{x^2-1}$.

3 $\sqrt{\dfrac{f^{-1}(x)+2}{f^{-1}(x)-2}}=f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ pour tout $x\in J$.

Exercice 32

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=2\sqrt{x}-x & \text{si } x\in[0;1] \\ f(x)=x-\sqrt{x^2-x} & \text{sinon} \end{cases}$$

(« sinon » : $x\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$).

1 Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2 Étudier la continuité de f en 0 et en 1.

3 Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0;1]$.

a) Vérifier que : $g(x) = 1 - \left(\sqrt{x} - 1\right)^2$.

b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

c) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J.

✔ Solution

1 Pour $x > 1$: $x - \sqrt{x^2 - x} = \dfrac{x^2 - (x^2 - x)}{x + \sqrt{x^2 - x}} = \dfrac{x}{x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

Pour $x < 0$: $x \to -\infty$ et $-\sqrt{x^2 - x} \to -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2 **En** 0 : $f(0) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} (2\sqrt{x} - x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(x - \sqrt{x^2 - x}\right) = 0 - 0 = 0$. f est continue en 0.

En 1 : $f(1) = 2 - 1 = 1$; $\lim\limits_{x \to 1^-} (2\sqrt{x} - x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(x - \sqrt{x^2 - x}\right) = 1 - 0 = 1$. f est continue en 1.

3 a) $1 - \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 = 1 - (x - 2\sqrt{x} + 1) = 2\sqrt{x} - x = g(x)$.

b) Sur $[0;1]$, $x \mapsto \sqrt{x} - 1$ est continue, strictement croissante, à valeurs dans $[-1;0]$; la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$, donc $x \mapsto (\sqrt{x}-1)^2$ est strictement décroissante et g est strictement croissante et continue sur $[0;1]$. g admet une réciproque définie sur $J = [g(0);g(1)] = [0;1]$.

c) Soient $x \in [0;1]$ et $y \in [0;1]$:

$$g(y) = x \iff (\sqrt{y} - 1)^2 = 1 - x \iff 1 - \sqrt{y} = \sqrt{1 - x} \iff y = \left(1 - \sqrt{1 - x}\right)^2$$

(on a utilisé $1 - \sqrt{y} \geq 0$). Donc $\forall x \in [0;1] : g^{-1}(x) = \left(1 - \sqrt{1 - x}\right)^2 = 2 - x - 2\sqrt{1 - x}$.

Exercice 33

Soit f la fonction définie sur $I = [4;+\infty[$ par : $f(x) = -\dfrac{x^2}{4} + x\sqrt{x} - x + 1$.

1 a) Vérifier que, pour tout x de I : $f(x) = 1 - \dfrac{1}{4}\left(x - 2\sqrt{x}\right)^2$.

b) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2 a) Sachant que, pour tout x de I : $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} - 2\right)$, dresser le tableau de variations de f sur I.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur I, puis vérifier que $\dfrac{64}{9} < \alpha < \dfrac{121}{16}$.

3 a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J =]-\infty;1]$.

b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

c) En déduire que $\alpha = 4 + 2\sqrt{3}$.

✔ Solution

1 a) $1 - \dfrac{1}{4}\left(x - 2\sqrt{x}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{4}\left(x^2 - 4x\sqrt{x} + 4x\right) = -\dfrac{x^2}{4} + x\sqrt{x} - x + 1 = f(x)$.

b) $x - 2\sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 2\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, donc $\left(x - 2\sqrt{x}\right)^2 \to +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2 a) Pour $x \geq 4$: $\sqrt{x} \geq 2$, donc $\sqrt{x} - 1 > 0$ et $\sqrt{x} - 2 \geq 0$: $f'(x) \leq 0$, et $f'(x) = 0$ seulement pour $x = 4$. f est strictement décroissante sur I, avec $f(4) = 1 - \frac{1}{4}(4 - 4)^2 = 1$.

x	4		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$

b) f est continue et strictement décroissante sur I et $f(I) =]-\infty;1] \ni 0$: l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in I$.

- $x = \frac{64}{9}$: $\sqrt{x} = \frac{8}{3}$, $x - 2\sqrt{x} = \frac{64}{9} - \frac{48}{9} = \frac{16}{9}$, $f\left(\frac{64}{9}\right) = 1 - \frac{1}{4} \times \frac{256}{81} = 1 - \frac{64}{81} = \frac{17}{81} > 0$.
- $x = \frac{121}{16}$: $\sqrt{x} = \frac{11}{4}$, $x - 2\sqrt{x} = \frac{121}{16} - \frac{88}{16} = \frac{33}{16}$, $f\left(\frac{121}{16}\right) = 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1089}{256} = 1 - \frac{1089}{1024} = -\frac{65}{1024} < 0$.

$\frac{64}{9}$ et $\frac{121}{16}$ sont dans I et $f\left(\frac{64}{9}\right) > f(\alpha) > f\left(\frac{121}{16}\right)$; f étant strictement décroissante : $\frac{64}{9} < \alpha < \frac{121}{16}$.

3 a) f est continue et strictement décroissante sur I, donc elle admet une réciproque définie sur $J = f(I) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); f(4)\right] =]-\infty;1]$.

b) Soient $x \in J$ et $y \in I$. Pour $y \geq 4$, $y - 2\sqrt{y} = \sqrt{y}(\sqrt{y} - 2) \geq 0$ et $\sqrt{y} - 1 > 0$:

$$f(y) = x \iff \left(y-2\sqrt{y}\right)^2 = 4(1-x) \iff y-2\sqrt{y} = 2\sqrt{1-x} \iff \left(\sqrt{y}-1\right)^2 = 1+2\sqrt{1-x}$$

$$\iff \sqrt{y} - 1 = \sqrt{1+2\sqrt{1-x}} \iff y = \left(1+\sqrt{1+2\sqrt{1-x}}\right)^2.$$

Donc $\forall x \in]-\infty;1] : f^{-1}(x) = \left(1+\sqrt{1+2\sqrt{1-x}}\right)^2$.

c) $f(\alpha) = 0 \iff \alpha = f^{-1}(0) = \left(1+\sqrt{1+2}\right)^2 = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 4+2\sqrt{3}$.

Exercice 34

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$.

1 Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f.

2 Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

3 Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

4 Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;1[$.

✔ Solution

1 $\sqrt[3]{x}$ est défini pour $x \geq 0$, et alors $1 + \sqrt[3]{x} \geq 1 > 0$. Donc $\mathcal{D}_f = [0;+\infty[$.

2 $f(x) = \dfrac{2-(1+\sqrt[3]{x})}{1+\sqrt[3]{x}} = -1 + \dfrac{2}{1+\sqrt[3]{x}}$. Sur $[0;+\infty[$, $x \mapsto 1+\sqrt[3]{x}$ est continue, strictement croissante et strictement positive, donc f est continue et strictement décroissante. $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$. f admet une réciproque définie sur $J =]-1;1]$.

3 Soient $x \in J$ et $y \geq 0$. Posons $t = \sqrt[3]{y} \geq 0$:

$$f(y) = x \iff 1 - t = x(1+t) \iff t(1+x) = 1-x \iff t = \frac{1-x}{1+x} \iff y = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3.$$

($1 + x > 0$ et $\frac{1-x}{1+x} \geq 0$ car $x \in]-1;1]$.) Donc $\forall x \in]-1;1] : f^{-1}(x) = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^3$.

4 Posons $h(x) = f(x) - x$ sur $[0;1]$: h est continue et strictement décroissante (somme de deux fonctions strictement décroissantes). $h(0) = 1 > 0$ et $h(1) = 0 - 1 = -1 < 0$: l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]0;1[$.

Exercice 35

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{\left(4 - \sqrt[3]{x^2}\right)^3}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0;8]$.
   a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.
   b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J.

Solution

1. $\sqrt[3]{x^2}$ est défini pour tout réel ($x^2 \geq 0$). $x \in \mathcal{D}_f \iff \left(4 - \sqrt[3]{x^2}\right)^3 \geq 0 \iff \sqrt[3]{x^2} \leq 4 = \sqrt[3]{64} \iff x^2 \leq 64 \iff -8 \leq x \leq 8$. Donc $\mathcal{D}_f = [-8;8]$.
2. $f(x) \geq 0$, donc une solution vérifie $x \geq 0$. Pour $x \in [0;8]$, les deux membres sont positifs :

$$f(x) = x \iff \left(4 - \sqrt[3]{x^2}\right)^3 = x^2 = \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3 \iff 4 - \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x^2} \iff \sqrt[3]{x^2} = 2 \iff x^2 = 8.$$

   Avec $x \geq 0$: $x = 2\sqrt{2}$. $\boxed{S = \left\{2\sqrt{2}\right\}}$.
3. a) Sur $[0;8]$: $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$ est continue et strictement croissante, donc $x \mapsto 4 - \sqrt[3]{x^2}$ est continue, strictement décroissante, à valeurs dans $[0;4]$; $t \mapsto \sqrt{t^3}$ est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Donc g est continue et strictement décroissante sur $[0;8]$. $g(0) = \sqrt{4^3} = 8$ et $g(8) = \sqrt{0} = 0$: g admet une réciproque définie sur $J = [0;8]$.
   b) Soient $x \in [0;8]$ et $y \in [0;8]$:

$$g(y) = x \iff \left(4 - \sqrt[3]{y^2}\right)^3 = x^2 \iff 4 - \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{x^2} \iff y^2 = \left(4 - \sqrt[3]{x^2}\right)^3$$

$$\iff y = \sqrt{\left(4 - \sqrt[3]{x^2}\right)^3} \quad (\text{car } y \geq 0).$$

   Donc $\forall x \in [0;8] : g^{-1}(x) = \sqrt{\left(4 - \sqrt[3]{x^2}\right)^3} = g(x)$: g est sa propre réciproque.

Exercice 36

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)^3 + 1$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
3. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

Solution

1. Si $a < b$: $a - 1 < b - 1$; la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $(a-1)^3 < (b-1)^3$ et $f(a) < f(b)$.
2. f est continue (polynôme) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$: f admet une réciproque définie sur $J = \mathbb{R}$.
3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$: $f(y) = x \iff (y-1)^3 = x - 1$.
   - Si $x \geq 1$: $y - 1 = \sqrt[3]{x-1}$, donc $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x-1}$.
   - Si $x < 1$: $(1-y)^3 = 1 - x > 0$, donc $1 - y = \sqrt[3]{1-x}$ et $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt[3]{1-x}$.

Exercice 37

Soit f la fonction définie sur $I =]2;+\infty[$ par : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\right)^2$.

1 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

2 Montrer que : $2 < x \leq 3 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} \leq 0$.

3 Montrer que f est strictement décroissante sur $]2;3]$.

4 Soit g la restriction de f à l'intervalle $]2;3]$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J.

✔ Solution

Posons $u(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$ pour $x > 2$, de sorte que $f = u^2$.

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x-2} = +\infty$, donc $u(x) \to 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
$\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt[3]{x-2} = 0^+$, donc $u(x) \to -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$.

2 $2 < x \leq 3 \Rightarrow 0 < x-2 \leq 1 \Rightarrow 0 < \sqrt[3]{x-2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} \geq 1 \Rightarrow u(x) \leq 0$.

3 $x \mapsto \sqrt[3]{x-2}$ est strictement croissante et strictement positive sur $]2;3]$, donc u est strictement croissante sur $]2;3]$. Si $2 < a < b \leq 3$: $u(a) < u(b) \leq 0$, donc $u(a)^2 > u(b)^2$ (la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$) : $f(a) > f(b)$. f est strictement décroissante sur $]2;3]$.

4 a) g est continue et strictement décroissante sur $]2;3]$; $g(3) = (1-1)^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = +\infty$.
g admet une réciproque définie sur $J = [0;+\infty[$.

b) Soient $x \in J$ et $y \in]2;3]$. Comme $u(y) \leq 0$:

$$g(y) = x \iff u(y) = -\sqrt{x} \iff \frac{1}{\sqrt[3]{y-2}} = 1 + \sqrt{x}$$

$$\iff \sqrt[3]{y-2} = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \iff y = 2 + \frac{1}{(1+\sqrt{x})^3}.$$

Donc $\forall x \in [0;+\infty[: g^{-1}(x) = 2 + \frac{1}{(1+\sqrt{x})^3}$.