CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 2

Dérivation

2BAC PC & SVT

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Exercice 1

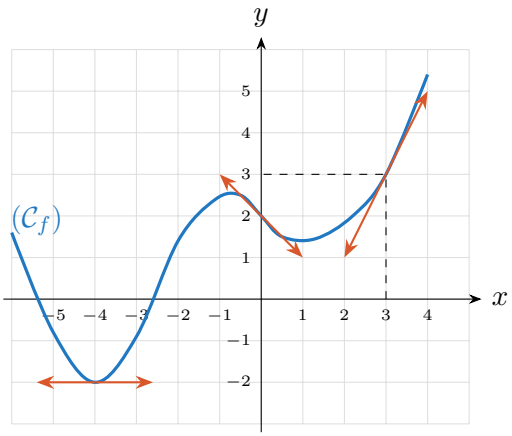
La courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentative d'une fonction f est donnée ci-contre. En chacun des points indiqués, $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente qui est tracée.

En vous servant du quadrillage, compléter :

$f(0) = \ldots$; $f'(0) = \ldots$

$f(3) = \ldots$; $f'(3) = \ldots$

$f(-4) = \ldots$; $f'(-4) = \ldots$



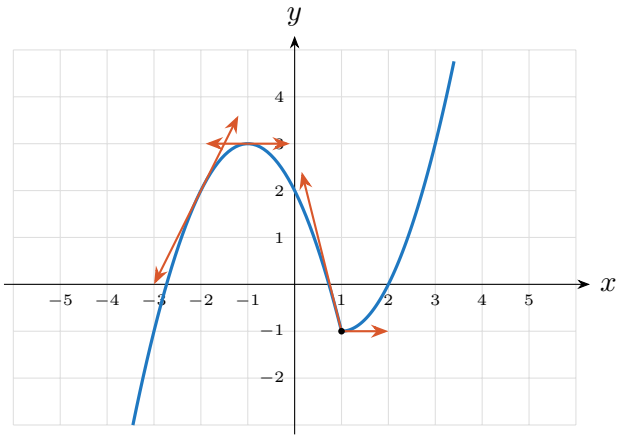
Solution

Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a :

- $f(0) = 2$; la tangente passe par $(0;2)$ et $(1;1)$: $f'(0) = \dfrac{1-2}{1-0} = -1$.
- $f(3) = 3$; la tangente passe par $(3;3)$ et $(4;5)$: $f'(3) = \dfrac{5-3}{4-3} = 2$.
- $f(-4) = -2$; la tangente est horizontale : $f'(-4) = 0$.

Exercice 2

La figure ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f.



1 À l'aide du graphique, déterminer : $f(-2)$, $f(-1)$, $f'(-2)$ et $f'(-1)$.

2 Donner une approximation de $f(-2{,}01)$.

3 Cocher la ou les bonnes réponses :

a) f est dérivable : ☐ à droite en 1 ☐ à gauche en 1 ☐ en 1

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)+1}{x-1} =$ ☐ -4 ☐ -1 ☐ 1 ☐ 4

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)+1}{x-1} =$ ☐ $-\infty$ ☐ $+\infty$ ☐ 0 ☐ 1

✔ Solution

1 $f(-2)=2$; $f(-1)=3$. La tangente en -2 passe par $(-3;0)$ et $(-2;2)$: $f'(-2)=\dfrac{2-0}{-2-(-3)}=2$.
La tangente en -1 est horizontale : $f'(-1)=0$.

2 Approximation affine au voisinage de -2 : $f(-2+h)\approx f(-2)+f'(-2)\,h$. Avec $h=-0{,}01$:

$$f(-2{,}01)\approx 2+2\times(-0{,}01)=1{,}98.$$

3 $f(1)=-1$, donc $\dfrac{f(x)+1}{x-1}=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$: ses limites à gauche et à droite en 1 sont les pentes des demi-tangentes en 1.

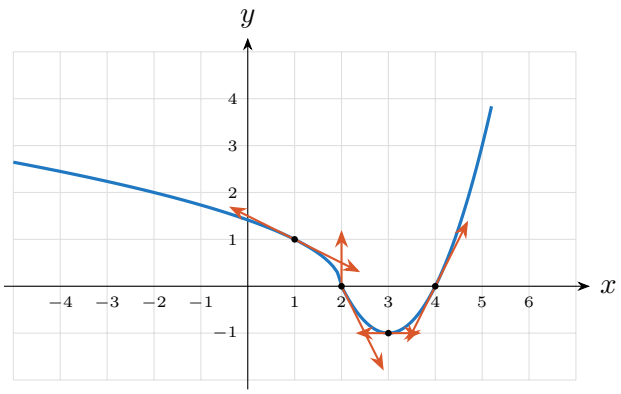
- La demi-tangente à gauche passe par $(1;-1)$ et $(0;3)$: pente $\dfrac{3-(-1)}{0-1}=-4$, donc $f'_g(1)=-4$.
- La demi-tangente à droite est horizontale : $f'_d(1)=0$.

a) ☒ à droite en 1 ☒ à gauche en 1 ☐ en 1 (car $f'_g(1)\neq f'_d(1)$).

b) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)+1}{x-1}=-4$. c) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)+1}{x-1}=0$.

Exercice 3

On a représenté la courbe d'une fonction f dans un repère orthonormé.



Cocher la bonne réponse dans chacun des cas suivants :

1. La fonction f est dérivable sur :	☐ $\mathbb{R}\setminus\{2\}$	☐ $\mathbb{R}\setminus\{4\}$	☐ $\mathbb{R}$
2. La fonction f est dérivable en :	☐ 2	☐ 2^-	☐ 2^+
3. L'ensemble des solutions de $f'(x)=0$ est :	☐ $S=\{3\}$	☐ $S=\varnothing$	☐ $S=\mathbb{R}$
4. $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)}{x-2}=$	☐ $+\infty$	☐ 0	☐ $-\infty$
5. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{f(x)}{x-4}=$	☐ $-\frac{1}{2}$	☐ 0	☐ 2
6. Le nombre dérivé de f en 1 est égal à :	☐ $-\frac{1}{2}$	☐ 0	☐ 2

✔ Solution

Au point $(2;0)$, la courbe admet à gauche une demi-tangente verticale et à droite une demi-tangente de pente -2 (elle passe par $(3;-2)$).

1 ☒ $\mathbb{R}\setminus\{2\}$: en tout autre point la courbe admet une tangente non verticale.

2 ☒ 2^+ : $f'_d(2)=-2$; à gauche la demi-tangente est verticale, donc f n'est pas dérivable à gauche en 2.

3 ☒ $S = \{3\}$: la seule tangente horizontale est au point $(3;-1)$.

4 ☒ $-\infty$: $f(2) = 0$, donc $\dfrac{f(x)}{x-2} = \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$. Pour $x < 2$ proche de 2, $f(x) > 0$ et $x - 2 < 0$, et la demi-tangente est verticale : la limite est $-\infty$.

5 ☒ 2 : $f(4) = 0$, donc la limite vaut $f'(4)$; la tangente en 4 passe par $(4;0)$ et $(3{,}5;-1)$: pente 2.

6 ☒ $-\frac{1}{2}$: la tangente en 1 passe par $(1;1)$ et $(3;0)$: pente $\dfrac{0-1}{3-1} = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = x\sqrt{x}$.

1 Montrer que f est dérivable à droite en 0, et déterminer $f'_d(0)$.

2 Vérifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et exprimer $f'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

3 Préciser alors l'ensemble des réels x pour lesquels f est dérivable.

✔ Solution

1 Pour $x > 0$: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

2 Sur $]0;+\infty[$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont dérivables, donc leur produit f aussi :

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

3 f est dérivable sur $[0;+\infty[$ (à droite en 0).

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = x + \sqrt{x}$.

1 Étudier la continuité de f sur $[0;+\infty[$.

2 Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

✔ Solution

1 $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont continues sur $[0;+\infty[$, donc leur somme f est continue sur $[0;+\infty[$.

2 Pour $x > 0$: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$.

f n'est pas dérivable à droite en 0 : la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet au point $O(0;0)$ une demi-tangente verticale (dirigée vers le haut).

Exercice 6

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.

1 Déterminer $\mathcal{D}_f$.

2 Étudier la dérivabilité de f à droite en 2 et à gauche en 0, puis interpréter les deux résultats graphiquement.

✔ Solution

1 $x \in \mathcal{D}_f \iff x^2 - 2x \geq 0 \iff x(x-2) \geq 0 \iff x \leq 0$ ou $x \geq 2$. Donc $\mathcal{D}_f =]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$.

2 **À droite en** 2 : pour $x > 2$,

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{\sqrt{x(x-2)}}{x-2} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{x-2}}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} \xrightarrow[x\to 2^+]{} +\infty.$$

À gauche en 0 : pour $x<0$, $x(x-2)=(-x)(2-x)$ et

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\sqrt{-x}\sqrt{2-x}}{-\left(\sqrt{-x}\right)^2}=-\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{-x}}\xrightarrow[x\to 0^-]{}-\infty.$$

f n'est dérivable ni à droite en 2, ni à gauche en 0 : $(\mathcal{C}_f)$ admet des demi-tangentes verticales aux points $(2;0)$ et $(0;0)$.

Exercice 7

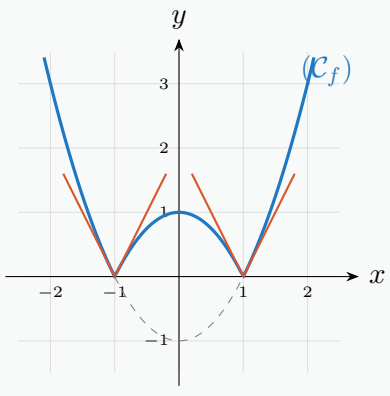
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=|x^2-1|$.

1. Tracer dans un repère la parabole d'équation $y=x^2-1$, et en déduire le tracé de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
2. Vérifier que f est une fonction paire.
3. Étudier la limite à droite en 1, puis la limite à gauche en 1 de $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. La fonction f est-elle dérivable en 1 ?
4. Donner les équations des demi-tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ aux points d'abscisses 1 et -1. Tracer ces demi-tangentes.

Solution

1. $(\mathcal{C}_f)$ coïncide avec la parabole là où $x^2-1\geq 0$ ($x\leq -1$ ou $x\geq 1$) ; sur $]-1;1[$, $(\mathcal{C}_f)$ est la symétrique de la parabole par rapport à l'axe des abscisses (voir la figure ci-dessous).
2. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et $f(-x)=|(-x)^2-1|=|x^2-1|=f(x)$: f est paire.
3. $f(1)=0$.
   - Pour $x>1$: $\dfrac{f(x)}{x-1}=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1\xrightarrow[x\to 1^+]{}2$.
   - Pour $x\in\,]-1;1[$: $\dfrac{f(x)}{x-1}=\dfrac{1-x^2}{x-1}=-(x+1)\xrightarrow[x\to 1^-]{}-2$.

   $f'_d(1)=2\neq f'_g(1)=-2$: f n'est pas dérivable en 1 ; le point $(1;0)$ est un point anguleux.
4. - En 1 : $(T_d):y=2(x-1)$ pour $x\geq 1$; $(T_g):y=-2(x-1)$ pour $x\leq 1$.
   - En -1 (par parité) : $f'_d(-1)=2$ et $f'_g(-1)=-2$, donc $y=2(x+1)$ pour $x\geq -1$; $y=-2(x+1)$ pour $x\leq -1$.



Exercice 8

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Calculer la dérivée f' de f.
3. Trouver une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ de f au point d'abscisse 1.

4 Étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (T).

5 Que peut-on dire de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse -1 ?

6 Déterminer à l'aide de (T) une valeur approchée de $f(1{,}02)$, puis de $f(0{,}96)$.

✔ Solution

1 $1+x^2>0$ pour tout réel x : $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.

2 $f'(x)=-\dfrac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

3 $f(1)=\dfrac{1}{2}$ et $f'(1)=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$. $(T):y=-\dfrac{1}{2}(x-1)+\dfrac{1}{2}$, soit $\boxed{(T):y=-\dfrac{1}{2}x+1}$.

4

$$f(x)-\left(1-\frac{x}{2}\right)=\frac{2-2(1+x^2)+x(1+x^2)}{2(1+x^2)}=\frac{x^3-2x^2+x}{2(1+x^2)}=\frac{x(x-1)^2}{2(1+x^2)}.$$

Ce nombre a le signe de x (pour $x\neq 1$) :

- si $x>0$ et $x\neq 1$: $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (T) ;
- si $x<0$: $(\mathcal{C})$ est au-dessous de (T) ;
- $(\mathcal{C})$ et (T) se coupent aux points d'abscisses 0 et 1.

5 f est paire, donc $(\mathcal{C})$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : la tangente en -1 est la symétrique de (T). En effet $f(-1)=\frac{1}{2}$ et $f'(-1)=\frac{1}{2}$, d'où $y=\dfrac{1}{2}x+1$.

6 Pour x proche de 1 : $f(x)\approx 1-\dfrac{x}{2}$.

$$f(1{,}02)\approx 1-0{,}51=0{,}49 \quad ; \quad f(0{,}96)\approx 1-0{,}48=0{,}52.$$

Exercice 9

Soit f la fonction trinôme telle que : $f(x)=ax^2+bx+c$. Déterminer les réels a, b et c tels que sa courbe $(\mathcal{C}_f)$ admette au point $A(1;3)$ une tangente de coefficient directeur égal à 1, ainsi qu'une tangente horizontale au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

✔ Solution

$f'(x)=2ax+b$. Les conditions s'écrivent :

$$\begin{cases} f(1)=3 \\ f'(1)=1 \\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+c=3 \\ 2a+b=1 \\ a+b=0 \end{cases}$$

En soustrayant les deux dernières : $a=1$, puis $b=-1$ et $c=3-a-b=3$. Donc $\boxed{f(x)=x^2-x+3}$.

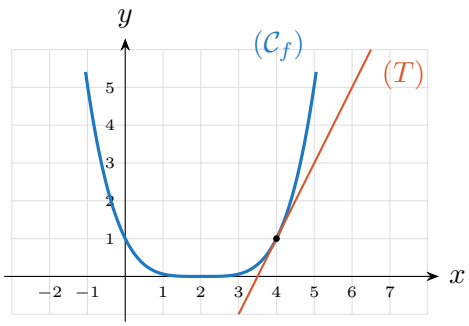
Vérification : $f(1)=3$, $f'(1)=2-1=1$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=1-1=0$.

Exercice 10

Sur le graphique ci-contre sont représentées la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^4$$

ainsi que la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $a = 4$.



1 Donner, par lecture graphique et sans justification, la valeur du nombre $f'(4)$.

2 Déterminer, à l'aide du calcul de la dérivée de f, la valeur du nombre $f'(3)$.

Solution

1 (T) passe par $(4;1)$ et $(3;-1)$: $f'(4) = \dfrac{1-(-1)}{4-3} = 2$.

2 $f = u^4$ avec $u(x) = 1 - \dfrac{x}{2}$, $u'(x) = -\dfrac{1}{2}$: $f'(x) = 4u'(x)u(x)^3 = -2\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)^3$. Donc $f'(3) = -2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 = -2 \times \left(-\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{1}{4}$.

(Contrôle : $f'(4) = -2(-1)^3 = 2$, conforme à la lecture graphique.)

Exercice 11

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$f_1(x) = x^2 + 2\sqrt{3}x - 1$; $f_2(x) = (2x^2 + x)\sqrt{x}$;

$f_3(x) = \dfrac{3}{x^2 - 1}$; $f_4(x) = \dfrac{x^3 - 1}{3x^2 + 1}$;

$f_5(x) = \cos(3x)$; $f_6(x) = (2x + 6)^4$.

Solution

- $f_1'(x) = 2x + 2\sqrt{3}$ (sur $\mathbb{R}$).
- Sur $]0;+\infty[$: $f_2'(x) = (4x+1)\sqrt{x} + \dfrac{2x^2 + x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2x(4x+1) + 2x^2 + x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{10x^2 + 3x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}\,(10x+3)}{2}$.
- Sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$: $f_3'(x) = \dfrac{-3 \times 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-6x}{(x^2-1)^2}$.
- Sur $\mathbb{R}$: $f_4'(x) = \dfrac{3x^2(3x^2+1) - 6x(x^3-1)}{(3x^2+1)^2} = \dfrac{3x^4 + 3x^2 + 6x}{(3x^2+1)^2} = \dfrac{3x(x^3 + x + 2)}{(3x^2+1)^2}$.
- $f_5'(x) = -3\sin(3x)$.
- $f_6'(x) = 4 \times 2 \times (2x+6)^3 = 8(2x+6)^3$.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - x + \sqrt{x^2 - 4x + 8} & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x + 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 Montrer que f est continue en 2.

2 a) Montrer que f est dérivable à droite en 2 et que $f'_d(2) = 0$.

b) Montrer que f est dérivable à gauche en 2.

c) f est-elle dérivable en 2 ? Interpréter graphiquement le résultat.

3 a) Soit $x \in]-\infty; 2[$. Calculer $f'(x)$.

b) Existe-t-il des tangentes à $(\mathcal{C}_f)$, aux points d'abscisse $a < 2$, parallèles à la droite (Δ) : $(2+\sqrt{2})x + 2y - 1 = 0$?

✔ **Solution**

Notons $u(x) = 1 - x + \sqrt{x^2 - 4x + 8}$ et $v(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}$. On remarque que $x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4 > 0$.

1 $f(2) = u(2) = 1 - 2 + \sqrt{4} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = v(2) = \dfrac{4 - 6 + 5}{3} = 1 = f(2)$; u est continue, donc $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = u(2) = f(2)$. f est continue en 2.

2 a) v est dérivable sur $]-1; +\infty[$ et $v(2) = f(2)$, donc pour $x > 2$: $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \dfrac{v(x) - v(2)}{x - 2} \xrightarrow[x \to 2^+]{} v'(2)$.

$$v'(x) = \frac{(2x-3)(x+1) - (x^2 - 3x + 5)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2} = \frac{(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$$

donc $f'_d(2) = v'(2) = 0$.

b) De même, u est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car $x^2 - 4x + 8 > 0$) et $u(2) = f(2)$:

$$u'(x) = -1 + \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 8}} = -1 + \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}$$

donc f est dérivable à gauche en 2 et $f'_g(2) = u'(2) = -1$.

c) $f'_g(2) = -1 \neq f'_d(2) = 0$: f n'est pas dérivable en 2. Le point $(2; 1)$ est un point anguleux de $(\mathcal{C}_f)$; demi-tangentes : $y = 1$ (pour $x \geq 2$) et $y = -x + 3$ (pour $x \leq 2$).

3 a) Pour $x < 2$: $f'(x) = -1 + \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}$.

b) (Δ) : $y = -\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{1}{2}$, de coefficient directeur $-1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On cherche $a < 2$ tel que $f'(a) = -1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire, en posant $t = a - 2 < 0$:

$$\frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Comme $t < 0$, cela équivaut à $\dfrac{t^2}{t^2 + 4} = \dfrac{1}{2} \iff t^2 = 4 \iff t = -2$, soit $a = 0$.

Vérification : $f'(0) = -1 + \dfrac{-2}{\sqrt{8}} = -1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Il existe donc une seule tangente parallèle à (Δ) : au point d'abscisse 0.

Exercice 13

1 Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto 2x^4 - 3x^3 + \dfrac{x^2}{2} + 3$ sur $\mathbb{R}$.

2 Donner l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse -1.

✔ Solution

1 $f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + x = x(8x^2 - 9x + 1) = x(x-1)(8x-1)$; f' s'annule en 0, $\frac{1}{8}$ et 1.

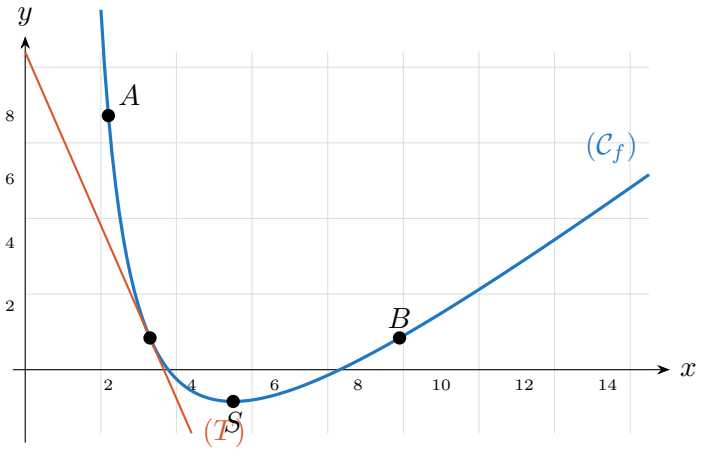
x	$-\infty$		0		$\frac{1}{8}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\frac{6149}{2048}$	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

($f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{2}{4096} - \frac{3}{512} + \frac{1}{128} + 3 = \frac{2-24+32}{4096} + 3 = 3 + \frac{5}{2048}$; $f(1) = 2 - 3 + \frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2}$; les limites en $\pm\infty$ sont celles de $2x^4$.)

2 $f(-1) = 2 + 3 + \frac{1}{2} + 3 = \frac{17}{2}$ et $f'(-1) = -8 - 9 - 1 = -18$: $y = -18(x+1) + \frac{17}{2}$, soit $\boxed{y = -18x - \frac{19}{2}}$.

Exercice 14

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur $I =]1;+\infty[$; la droite (T) est tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 3.



1 a) Lire les valeurs de $f(2)$, $f(3)$ et $f(9)$.

b) Par lecture graphique, donner une valeur approchée des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

c) Déterminer le signe de f sur I.

2 a) Que vaut $f'(5)$? (Justifier.)

b) Donner une équation de la droite (T). Quel nombre dérivé peut-on en déduire ?

c) Dresser le tableau de variations de f sur I.

3 La fonction f est de la forme : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

a) Calculer $f'(x)$ en fonction de a et de c.

b) Exprimer que A et B sont deux points de $(\mathcal{C}_f)$ et qu'en S la tangente est horizontale.

c) En déduire un système d'inconnues a, b et c, puis le résoudre pour trouver l'expression de $f(x)$.

4 Déterminer l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 2.

✔ Solution

1 a) $f(2) = 8$; $f(3) = 1$; $f(9) = 1$.

b) $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en deux points : $x_1 \approx 3{,}4$ et $x_2 \approx 7{,}6$.

c) $f(x) > 0$ sur $]1;x_1[\cup]x_2;+\infty[$; $f(x) < 0$ sur $]x_1;x_2[$; $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

2 a) $f'(5)=0$: au point $S(5;-1)$, la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ est horizontale (minimum).

b) (T) passe par $(0;10)$ et $(4;-2)$: pente $\dfrac{-2-10}{4}=-3$, donc $(T):y=-3x+10$. Comme (T) est tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 3 : $f'(3)=-3$.

c)

x	1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3 a) $f'(x)=a-\dfrac{c}{(x-1)^2}$.

b) $A\in(\mathcal{C}_f)\iff f(2)=8$; $B\in(\mathcal{C}_f)\iff f(9)=1$; tangente horizontale en $S\iff f'(5)=0$.

c)

$$\begin{cases}2a+b+c=8\\9a+b+\dfrac{c}{8}=1\\a-\dfrac{c}{16}=0\end{cases}$$

La troisième équation donne $c=16a$; en reportant : $18a+b=8$ et $11a+b=1$. Par soustraction $7a=7$, donc $a=1$, $b=-10$ et $c=16$:

$$\boxed{f(x)=x-10+\frac{16}{x-1}}$$

Vérification : $f(5)=5-10+4=-1$ et $f(3)=3-10+8=1$; $f'(3)=1-\frac{16}{4}=-3$, conforme à 2.b).

4 $f(2)=8$ et $f'(2)=1-16=-15$: $y=-15(x-2)+8$, soit $\boxed{y=-15x+38}$.

Exercice 15

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant 0, et $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique.

1 Exprimer, en fonction de $f(0)$ et $f'(0)$, l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0. On notera g la fonction affine correspondante.

2 Déterminer l'approximation affine g de f en 0 lorsque $f(x)=(1+x)^2$.

3 On note $e(x)=|f(x)-g(x)|$ l'erreur de l'approximation. Trouver une expression simple de $e(x)$.

4 Expliquer comment déterminer, sans calculatrice, une approximation de $1{,}0022^2$. Quelle est l'erreur commise ?

✔ Solution

1 $y=f'(0)\,x+f(0)$, donc $g(x)=f(0)+f'(0)\,x$.

2 $f(0)=1$, $f'(x)=2(1+x)$, $f'(0)=2$: $g(x)=1+2x$.

3 $e(x)=|1+2x+x^2-(1+2x)|=x^2$.

4 $1{,}0022^2=f(0{,}0022)\approx g(0{,}0022)=1+0{,}0044=1{,}0044$. L'erreur commise est $e(0{,}0022)=0{,}0022^2=4{,}84\times10^{-6}$.

Exercice 16

1 Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x)=x^3-x^2+3x+1$.

a) Calculer les limites de P en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Déterminer les variations de P sur $\mathbb{R}$.

c) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in]-1;0[$.

d) Donner un encadrement de α à 10^{-3}.

e) Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \dfrac{2}{x^2+1}$.

a) Démontrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Déterminer la dérivée de f et montrer que : $f'(x) = \dfrac{(x+1)P(x)}{(x^2+1)^2}$.

c) À l'aide de la question 1.e), déterminer le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

✔ Solution

1 a) Un polynôme a la limite de son terme de plus haut degré : $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$.

b) $P'(x) = 3x^2 - 2x + 3$; discriminant $\Delta = 4 - 36 = -32 < 0$, donc $P'(x) > 0$ pour tout x : P est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) P est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \ni 0$: l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α. $P(-1) = -1 - 1 - 3 + 1 = -4 < 0$ et $P(0) = 1 > 0$, donc $\alpha \in]-1;0[$.

d) $P(-0{,}296) \approx -0{,}00155 < 0$ et $P(-0{,}295) \approx 0{,}00230 > 0$, donc $\boxed{-0{,}296 < \alpha < -0{,}295}$.

e) P étant strictement croissante : $P(x) < 0$ pour $x < \alpha$, $P(\alpha) = 0$, et $P(x) > 0$ pour $x > \alpha$.

2 a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2}{x^2+1} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) $f'(x) = 1 + \dfrac{2\times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(x^2+1)^2 + 4x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4+2x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$.

Or $(x+1)P(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 + x + x^3 - x^2 + 3x + 1 = x^4 + 2x^2 + 4x + 1$. Donc $f'(x) = \dfrac{(x+1)P(x)}{(x^2+1)^2}$.

c) $f'(x)$ a le signe de $(x+1)P(x)$, avec $-1 < \alpha$:

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

($f(-1) = -1 - \frac{2}{2} = -2$.)

Exercice 17

En utilisant le nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0} \frac{(x+1)^{2021} - 1}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{(x^2-1)^9 - 1}{x - \sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x - \sqrt{3}}{x - \frac{\pi}{3}} \quad ; \quad \lim_{x\to1} \frac{x^2 + \cos(\pi x)}{x - 1}$$

✔ Solution

Si u est dérivable en a : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{u(x) - u(a)}{x - a} = u'(a)$.

- $u(x) = (x+1)^{2021}$, $u(0) = 1$, $u'(x) = 2021(x+1)^{2020}$: la limite vaut $u'(0) = 2021$.
- $u(x) = (x^2-1)^9$, $u(\sqrt{2}) = 1$, $u'(x) = 9 \times 2x\,(x^2-1)^8$: la limite vaut $u'(\sqrt{2}) = 18\sqrt{2}$.
- $u(x) = 2\sin x$, $u\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, $u'(x) = 2\cos x$: la limite vaut $2\cos\frac{\pi}{3} = 1$.
- $u(x) = x^2 + \cos(\pi x)$, $u(1) = 1 - 1 = 0$, $u'(x) = 2x - \pi\sin(\pi x)$: la limite vaut $u'(1) = 2$.

Exercice 18

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un domaine que l'on déterminera.
2. a) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et en $\sqrt{2}$.
   b) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$ et $\left(f^{-1}\right)'(\sqrt{2})$. *(On remarque que $f(0) = 0$ et $f(1) = \sqrt{2}$.)*

Solution

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \sqrt{x^2+1} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: f admet une réciproque définie sur $J = \mathbb{R}$.
2. a) $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1 \neq 0$; $f(1) = \sqrt{2}$ et $f'(1) = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \neq 0$. Donc f^{-1} est dérivable en 0 et en $\sqrt{2}$.
   b) $\left(f^{-1}\right)'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$; $\left(f^{-1}\right)'(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Exercice 19

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$, puis calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
2. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f \setminus \{0\}$: $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{2\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [4;+\infty[$.
   a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
   b) Montrer que g^{-1} est dérivable en $\dfrac{9}{2}$, puis calculer $\left(g^{-1}\right)'\left(\dfrac{9}{2}\right)$.

Solution

1. $x \in \mathcal{D}_f \iff x \geq 0$ et $\sqrt{x} \neq 1$: $\mathcal{D}_f = [0;1[\cup]1;+\infty[$.
   - $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ (numérateur $\to 1$, dénominateur $\to 0^-$ ou 0^+).
   - Pour $x > 1$: $f(x) = \sqrt{x} \times \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; comme $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \to 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   - En 0 : $f(0) = 0$.
2. Pour $x \in]0;1[$: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1} \xrightarrow[x\to0^+]{} -1$. f est dérivable à droite en 0 avec $f'_d(0) = -1$: $(\mathcal{C}_f)$ admet en O une demi-tangente d'équation $y = -x$ $(x \geq 0)$.

3 Pour $x \in \mathcal{D}_f \setminus \{0\}$:

$$f'(x) = \frac{1 \times (\sqrt{x}-1) - x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{\sqrt{x}-1-\frac{\sqrt{x}}{2}}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}-1)^2}.$$

4 $f'(x)$ a le signe de $\sqrt{x}-2$: négatif pour $x<4$, positif pour $x>4$. $f(4) = \dfrac{4}{2-1} = 4$.

x	0		1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		‖		$-$	0	$+$		
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	‖	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

5 a) g est continue et strictement croissante sur $I = [4;+\infty[$: elle admet une réciproque définie sur $J = g(I) = [g(4);+\infty[= [4;+\infty[$.

b) On cherche $x \geq 4$ tel que $g(x) = \frac{9}{2}$: $g(9) = \dfrac{9}{3-1} = \dfrac{9}{2}$. Comme $g'(9) = \dfrac{3-2}{2\times 4} = \dfrac{1}{8} \neq 0$, g^{-1} est dérivable en $\frac{9}{2}$ et

$$\left(g^{-1}\right)'\left(\tfrac{9}{2}\right) = \frac{1}{g'(9)} = 8.$$

Exercice 20

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - 2\sqrt{x-1}$.

1 Déterminer $\mathcal{D}_f$, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 Étudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter graphiquement le résultat.

3 Montrer que, pour tout $x \in]1;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}\left(1+\sqrt{x-1}\right)}$.

4 Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5 Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [2;+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable en 1, puis calculer $\left(g^{-1}\right)'(1)$.

✔ Solution

1 $\mathcal{D}_f = [1;+\infty[$. Pour $x>1$: $f(x) = (x-1)-2\sqrt{x-1}+1 = \left(\sqrt{x-1}-1\right)^2$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2 $f(1) = 1$. Pour $x>1$: $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{(x-1)-2\sqrt{x-1}}{x-1} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{x-1}} \xrightarrow[x\to 1^+]{} -\infty$. f n'est pas dérivable à droite en 1 : $(\mathcal{C}_f)$ admet au point $(1;1)$ une demi-tangente verticale (dirigée vers le bas).

3 Pour $x>1$: $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{\sqrt{x-1}\left(1+\sqrt{x-1}\right)} = \dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}\left(1+\sqrt{x-1}\right)}$.

4 $f'(x)$ a le signe de $x-2$; $f(2) = 2-2 = 0$.

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5 a) g est continue et strictement croissante sur $[2;+\infty[$: elle admet une réciproque définie sur $J=[0;+\infty[$.

b) $g(x)=1 \iff \left(\sqrt{x-1}-1\right)^2=1 \iff \sqrt{x-1}-1=1$ (car $\sqrt{x-1}\geq 1$ pour $x\geq 2$) $\iff x=5$. $g'(5)=\dfrac{3}{2\times 3}=\dfrac{1}{2}\neq 0$, donc g^{-1} est dérivable en 1 et $\left(g^{-1}\right)'(1)=\dfrac{1}{g'(5)}=2$.

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0]$ par : $f(x)=\sqrt[3]{1-x}$.

1 Montrer que f est continue sur $]-\infty;0]$.

2 a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty;0]$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x\in]-\infty;0]$.

b) En déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.

3 Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

4 Calculer $f(-7)$ et $f'(-7)$; en déduire que f^{-1} est dérivable en 2, et déterminer $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

5 Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

✔ Solution

1 Pour $x\leq 0$: $1-x\geq 1>0$. $x\mapsto 1-x$ est continue et positive, donc $f=\sqrt[3]{1-x}$ est continue sur $]-\infty;0]$.

2 a) $u(x)=1-x$ est dérivable et strictement positive sur $]-\infty;0]$, donc $\sqrt[3]{u}$ est dérivable et

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{3\sqrt[3]{u(x)^2}}=\frac{-1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}.$$

b) $f'(x)<0$ pour tout $x\leq 0$: f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.

3 f est continue et strictement décroissante ; $f(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. f admet une réciproque définie sur $J=[1;+\infty[$.

4 $f(-7)=\sqrt[3]{8}=2$ et $f'(-7)=\dfrac{-1}{3\sqrt[3]{64}}=-\dfrac{1}{12}\neq 0$. Donc f^{-1} est dérivable en 2 et $\left(f^{-1}\right)'(2)=\dfrac{1}{f'(-7)}=-12$.

5 Soient $x\in J$ et $y\leq 0$: $f(y)=x \iff \sqrt[3]{1-y}=x \iff 1-y=x^3 \iff y=1-x^3$. Donc $\forall x\in[1;+\infty[$: $f^{-1}(x)=1-x^3$.

Exercice 22

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=x\sqrt[3]{x-2}$.

1 Déterminer $\mathcal{D}_f$, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2 Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 2, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3 a) Montrer que $\forall x\in]2;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{4x-6}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4 a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable en 3, puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(3)$.

✔ Solution

1 $\sqrt[3]{x-2}$ est défini pour $x-2\geq 0$: $\mathcal{D}_f=[2;+\infty[$. $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x-2}=+\infty$, donc

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2 $f(2) = 0$. Pour $x > 2$:

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{x\sqrt[3]{x-2}}{\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^3} = \frac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} \xrightarrow[x\to 2^+]{} +\infty.$$

f n'est pas dérivable à droite en 2 : $(\mathcal{C}_f)$ admet au point $(2;0)$ une demi-tangente verticale.

3 a) Pour $x > 2$: $f'(x) = \sqrt[3]{x-2} + x \times \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \dfrac{3(x-2)+x}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \dfrac{4x-6}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

b) Pour $x > 2$: $4x - 6 > 2 > 0$, donc $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$, de $f(2) = 0$ à $+\infty$.

4 a) f est continue et strictement croissante sur $[2;+\infty[$: elle admet une réciproque définie sur $J = [0;+\infty[$.

b) $f(3) = 3 \times 1 = 3$ et $f'(3) = \dfrac{6}{3} = 2 \neq 0$: f^{-1} est dérivable en 3 et $\left(f^{-1}\right)'(3) = \dfrac{1}{f'(3)} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 23

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x}{2}\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)$.

1 Déterminer $\mathcal{D}_f$ et calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

2 a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)^2}{2\sqrt{x^2+4}}$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

3 Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

4 Montrer que, pour tout x de J : $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$.

5 Calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

✔ Solution

1 $x^2 + 4 > 0$: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (produit de deux facteurs tendant vers $+\infty$).
- En $-\infty$: $x + \sqrt{x^2+4} = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}-x}$, donc $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}-x}$. Pour $x < 0$: $\sqrt{x^2+4} = -x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$, d'où

$$f(x) = \frac{2x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+1\right)} = \frac{-2}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+1} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1.$$

2 a) $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x^2 + x\sqrt{x^2+4}\right)$, donc

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(2x + \sqrt{x^2+4} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\right) = \frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2+4} + (x^2+4)}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)^2}{2\sqrt{x^2+4}}.$$

b) $\sqrt{x^2+4} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$, donc $\sqrt{x^2+4} + x > 0$ et $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de -1 (en $-\infty$) à $+\infty$, avec $f(0) = 0$.

3 f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$: elle admet une réciproque définie sur $J =]-1;+\infty[$.

4 Soit $x \in J$ et $y = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$. Alors

$$y^2 + 4 = \frac{x^2+4x+4}{x+1} = \frac{(x+2)^2}{x+1} \quad \text{donc} \quad \sqrt{y^2+4} = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} \ (\text{car } x+2>0),$$

$$y + \sqrt{y^2+4} = \frac{2x+2}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1} \quad \text{et} \quad f(y) = \frac{y}{2} \times 2\sqrt{x+1} = x.$$

Comme f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur J : $f^{-1}(x) = y = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$.

5 $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{(2+0)^2}{2\times 2} = 1 \neq 0$: $\left(f^{-1}\right)'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$.

Exercice 24

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{1-x^3} \ ; \ x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x(x^2-1)} \ ; \ x \geq 1 \end{cases}$

1 Montrer que f est continue en $a = 1$.

2 Étudier la dérivabilité de f au point $a = 1$. Interpréter le résultat obtenu.

3 a) Calculer $f'(x)$.

b) Donner le tableau de variations de la fonction f.

4 Soit g la restriction de f à $I =]-\infty; 1[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à préciser.

b) Calculer $g(-1)$ et en déduire la valeur de $\left(g^{-1}\right)'\left(\sqrt[3]{2}\right)$.

c) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout x de J.

✔ Solution

Pour $x < 1$: $x^3 < 1$, donc $1 - x^3 > 0$; pour $x \geq 1$: $x(x^2-1) \geq 0$. f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

1 $f(1) = \sqrt{1\times 0} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt[3]{1-x^3} = 0 = f(1)$; $x \mapsto \sqrt{x(x^2-1)}$ est continue sur $[1; +\infty[$. Donc f est continue en 1.

2 **À droite** : pour $x > 1$, $\dfrac{f(x)}{x-1} = \dfrac{\sqrt{x(x+1)}\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x-1}} \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$.

À gauche : pour $x < 1$, $1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$ et

$$\frac{f(x)}{x-1} = -\frac{\sqrt[3]{1+x+x^2}\ \sqrt[3]{1-x}}{\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^3} = -\frac{\sqrt[3]{1+x+x^2}}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} \xrightarrow[x\to 1^-]{} -\infty.$$

f n'est dérivable ni à droite ni à gauche en 1 : $(\mathcal{C}_f)$ admet au point $(1;0)$ deux demi-tangentes verticales, dirigées vers le haut. C'est un point de rebroussement.

3 a) Pour $x < 1$: $f'(x) = \dfrac{-3x^2}{3\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \dfrac{-x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$.

Pour $x > 1$: $f'(x) = \dfrac{(x^3-x)'}{2\sqrt{x^3-x}} = \dfrac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}}$.

b) Pour $x < 1$: $f'(x) \leq 0$ (nul seulement en 0) ; pour $x > 1$: $3x^2 - 1 > 0$, donc $f'(x) > 0$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (car $1 - x^3 \to +\infty$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4 a) g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ ($g' < 0$ sauf en 0) : elle admet une réciproque définie sur $J = g(I) = \left]\lim\limits_{x\to 1^-} g(x); \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\right[=]0;+\infty[$.

b) $g(-1) = \sqrt[3]{1+1} = \sqrt[3]{2}$ et $g'(-1) = \dfrac{-1}{\sqrt[3]{4}} \neq 0$. Donc

$$(g^{-1})'(\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{g'(-1)} = -\sqrt[3]{4}.$$

c) Soient $x \in]0;+\infty[$ et $y < 1$: $g(y) = x \iff 1 - y^3 = x^3 \iff y^3 = 1 - x^3$.

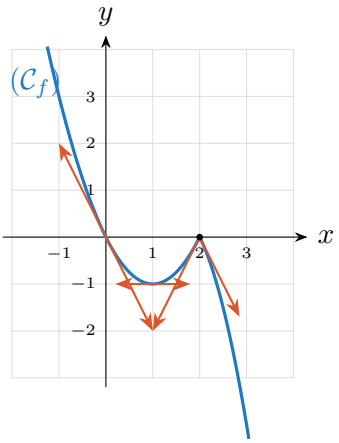
- Si $0 < x \leq 1$: $1 - x^3 \geq 0$ et $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$.
- Si $x > 1$: $1 - x^3 < 0$, donc $(-y)^3 = x^3 - 1 > 0$ et $g^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x^3-1}$.

(Contrôle : $g^{-1}(\sqrt[3]{2}) = -\sqrt[3]{2-1} = -1$.)

Exercices complémentaires

Exercice 25

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$; les tangentes et demi-tangentes tracées sont à lire sur le quadrillage.



1 Donner $f'(1)$ et $f'(0)$.

2 La fonction f est-elle dérivable en 2 ?

3 Déterminer $f'_g(2)$ et $f'_d(2)$.

4 Dresser le tableau de variations de f en précisant le signe de $f'(x)$.

5 Dresser le tableau de signe de f.

6 Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 3$.

✔ Solution

1 La tangente en 1 est horizontale : $f'(1) = 0$. La tangente en 0 passe par $(0;0)$ et $(1;-2)$: $f'(0) = -2$.

2 Non : en 2, les deux demi-tangentes n'ont pas la même pente (point anguleux).

3 La demi-tangente à gauche passe par $(2;0)$ et $(1;-2)$: $f'_g(2) = \dfrac{0-(-2)}{2-1} = 2$. La demi-tangente à droite a pour pente -2 : $f'_d(2) = -2$.

4

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	

5 f s'annule en 0 et en 2 :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

6 Graphiquement, $f(-1) = 3$ et $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de la droite $y = 3$ à partir de $x = -1$: $S = [-1; +\infty[$.

Exercice 26

On considère la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{3-2x}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 Donner $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f, puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2 Étudier la dérivabilité de f à gauche en $\dfrac{3}{2}$. Interpréter graphiquement le résultat.

3 a) Montrer, pour tout $x \in \mathcal{D}_f \setminus \{\frac{3}{2}\}$, que : $f'(x) = \dfrac{3(1-x)}{\sqrt{3-2x}}$.

b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

4 Soit g la restriction de f à $]-\infty; 1]$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Étudier la dérivabilité de g^{-1} sur J, puis calculer $\left(g^{-1}\right)'(0)$.

✔ Solution

1 $x \in \mathcal{D}_f \iff 3-2x \geq 0 \iff x \leq \frac{3}{2}$: $\mathcal{D}_f =]-\infty; \frac{3}{2}]$. $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{3-2x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2 $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$. Pour $x < \frac{3}{2}$:

$$\frac{f(x) - f\left(\frac{3}{2}\right)}{x - \frac{3}{2}} = \frac{2x\sqrt{3-2x}}{2x-3} = \frac{-2x\sqrt{3-2x}}{\left(\sqrt{3-2x}\right)^2} = \frac{-2x}{\sqrt{3-2x}} \xrightarrow[x\to\frac{3}{2}^-]{} -\infty.$$

f n'est pas dérivable à gauche en $\frac{3}{2}$: $(\mathcal{C}_f)$ admet au point $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ une demi-tangente verticale.

3 a) Pour $x < \frac{3}{2}$: $f'(x) = \sqrt{3-2x} + x \times \dfrac{-2}{2\sqrt{3-2x}} = \dfrac{3-2x-x}{\sqrt{3-2x}} = \dfrac{3(1-x)}{\sqrt{3-2x}}$.

b) $f'(x)$ a le signe de $1-x$; $f(1) = 1$.

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

4 a) g est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 1]$: elle admet une réciproque définie sur $J =]-\infty; 1]$.

b) g est dérivable sur $]-\infty; 1]$ et $g'(x) \neq 0$ pour $x < 1$, $g'(1) = 0$. Donc g^{-1} est dérivable sur $]-\infty; 1[$; elle n'est pas dérivable en $1 = g(1)$ (demi-tangente verticale).

$g(x) = 0 \iff x = 0$ (dans $]-\infty; 1]$) et $g'(0) = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, donc $\left(g^{-1}\right)'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.