DEVOIR SURVEILLÉ – CHAPITRE 8 | CORRIGÉ

1ère Spé Maths

Applications de la dérivation

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Date : ..... **Nom :** _____ **Durée :** 40 min **Note :** ..... / 10

Justifier chaque réponse. La calculatrice est autorisée.

Capacités évaluées

- Étudier la parité d'une fonction.
- Étudier des variations, déterminer des extremums, la position d'une courbe et d'une tangente.
- Résoudre un problème d'optimisation.

Exercice 1 : Parité (2 points)

Étudier la parité des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x$ et $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+3}$.

Solution

$\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. $f(-x) = -x^3 + 4x = -f(x)$: f est impaire. *(1 pt)*

$g(-x) = \dfrac{(-x)^2+1}{(-x)^2+3} = g(x)$: g est paire. *(1 pt)*

Exercice 2 : Étude d'une fonction (5 points)

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ sur $[-2\,;3]$.

1. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $[-2\,;3]$.
3. Déterminer le maximum et le minimum de f sur $[-2\,;3]$.
4. Déterminer la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1. Vérifier que $f(x) - (-3x+5) = (x-1)^3$, puis étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.

Solution

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$: positif sur $[-2\,;0[$, négatif sur $]0\,;2[$, positif sur $]2\,;3]$. *(1,5 pt)*
2. $f(-2) = -16$, $f(0) = 4$, $f(2) = 0$, $f(3) = 4$.

x	-2		0		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-16	↗	4	↘	0	↗	4

(1,5 pt)

3. Maximum 4 (en 0 et en 3) ; minimum -16 (en -2). *(1 pt)*
4. $f(1) = 2$, $f'(1) = -3$: T : $y = -3(x-1) + 2 = -3x + 5$. $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ et

$f(x) + 3x - 5 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. ✓
$(x-1)^3 < 0$ si $x < 1$, > 0 si $x > 1$: $\mathcal{C}_f$ est en dessous de T sur $[-2\,;1[$ et au-dessus sur $]1\,;3]$. *(1 pt)*

Exercice 3 : Optimisation (3 points)

On fabrique une boîte sans couvercle, à base carrée de côté x cm ($x > 0$) et de hauteur h cm, de volume 32 cm^3.

1 Exprimer h en fonction de x, puis montrer que la surface de carton utilisée est $S(x) = x^2 + \dfrac{128}{x}$.

2 Calculer $S'(x)$ et montrer que $S'(x) = \dfrac{2(x^3 - 64)}{x^2}$.

3 En déduire les dimensions de la boîte qui utilise le moins de carton.

✔ Solution

1 $x^2 h = 32$ donc $h = \dfrac{32}{x^2}$. Surface : fond x^2 + quatre faces $4xh = \dfrac{128}{x}$. *(1 pt)*

2 $S'(x) = 2x - \dfrac{128}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 128}{x^2} = \dfrac{2(x^3 - 64)}{x^2}$. *(1 pt)*

3 $x^3 - 64 < 0$ si $x < 4$ et > 0 si $x > 4$: S est minimale en $x = 4$. Boîte de côté 4 cm et de hauteur $h = 2$ cm (surface $S(4) = 48$ cm^2). *(1 pt)*