PRÉPARATION AU DST – CHAPITRE 4 | CORRIGÉ

1ère Spé Maths

Dérivation : préparation au DST

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Capacités évaluées

- Déterminer l'ensemble de dérivabilité d'une fonction et calculer sa fonction dérivée.
- Calculer un taux de variation entre a et $a+h$ et en déduire le nombre dérivé $f'(a)$.
- Dériver un quotient et montrer qu'une dérivée a une forme donnée.
- Déterminer l'équation réduite d'une tangente ; chercher une tangente parallèle.
- Étudier le signe de $f(x)-(ax+b)$ et en déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et d'une droite.

Format du DST : 30 min, noté sur 10, toujours le même schéma : **Exercice 1** dérivées (3,5 pts) – **Exercice 2** taux de variation (1,5 pt) – **Exercice 3** étude d'une fonction rationnelle (5 pts).
Ce document contient **le sujet 2025** de ton professeur, puis **3 DST types** sur le même modèle.

Méthode : les réflexes du DST

1. **Ensemble de dérivabilité :** polynôme $\to \mathbb{R}$; $\frac{1}{x} \to \mathbb{R}^*$; $\sqrt{x} \to]0;+\infty[$ (et **pas** $[0;+\infty[$) ; quotient $\to$ on retire les valeurs qui annulent le dénominateur.
2. $(ax+b)^n$: $\big(g(ax+b)\big)' = a\,g'(ax+b)$, par exemple $\big((5-2x)^4\big)' = -2\times 4(5-2x)^3$.
3. $u(x)\sqrt{x}$: formule du produit, puis tout sur $2\sqrt{x}$: $\sqrt{x}\times u'(x) = \dfrac{2x\,u'(x)}{2\sqrt{x}}$.
4. **Taux de variation :** calculer $f(a)$, développer $f(a+h)$, simplifier $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ par h, puis faire tendre h vers 0.
5. **Tangente :** $y = f'(a)(x-a)+f(a)$. **Tangente parallèle :** même coefficient directeur, on résout $f'(x) = f'(a)$.
6. **Position relative :** signe de $f(x)-(ax+b)$; positif $\Rightarrow \mathcal{C}_f$ **au-dessus**, négatif $\Rightarrow$ **en dessous**.

DEVOIR SURVEILLÉ – CHAPITRE 4 | CORRIGÉ

1ère Spé Maths

Dérivation – Sujet 2025

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Date : ..... **Nom :** _____ **Durée :** 30 min **Note :** ..... / 10

Justifier chaque réponse. La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 : Dérivées (3,5 points)

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction puis donner sa fonction dérivée :

1. $f(x) = 5x^4 + 7x^3 + x^2 - x + 1$
2. $h(x) = (5 - 2x)^4$
3. $g(x) = \dfrac{4}{x} - \dfrac{5x^2}{2}$
4. $k(x) = \sqrt{x}\,(x^2 - 1)$

Solution

1. f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 20x^3 + 21x^2 + 2x - 1$. *(0,75 pt)*
2. $h(x) = g(5 - 2x)$ avec $g(X) = X^4$ et $a = -2$: dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = -2 \times 4(5 - 2x)^3 = \boxed{-8(5 - 2x)^3}$. *(1 pt)*
3. g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$: $g'(x) = 4 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{5}{2} \times 2x = -\dfrac{4}{x^2} - 5x$. *(0,75 pt)*
4. $k = u \times v$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ (dérivable sur $]0\,;+\infty[$) et $v(x) = x^2 - 1$: k est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et

$$k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 - 1) + \sqrt{x} \times 2x = \frac{x^2 - 1 + 4x^2}{2\sqrt{x}} = \boxed{\frac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}}}.$$

(1 pt)

Exercice 2 : Taux de variation (1,5 point)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 5$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Déterminer le taux de variation de f entre -1 et $-1 + h$ puis en déduire le nombre dérivé de f en -1.

Solution

$f(-1) = 1+3+5 = 9$ et $f(-1+h) = (-1+h)^2 - 3(-1+h) + 5 = 1 - 2h + h^2 + 3 - 3h + 5 = 9 - 5h + h^2$.
Pour $h \neq 0$: $\dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \dfrac{-5h + h^2}{h} = -5 + h$. Or $\lim\limits_{h \to 0}(-5 + h) = -5$, donc $\boxed{f'(-1) = -5}$.
(1,5 pt)

Exercice 3 : Étude d'une fonction rationnelle (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 4}{x + 1}$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Donner l'ensemble de dérivabilité de f puis montrer que $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{(x + 1)^2}$.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 0.

3 Existe-t-il un autre point de $\mathcal{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à T ? Si oui, préciser ses coordonnées.

4 Étudier le signe de $f(x) - (2x-4)$. Interpréter graphiquement le résultat.

✔ **Solution**

1 f est un quotient de polynômes, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Avec $u = x^2 - 2x - 4$, $u' = 2x - 2$, $v = x + 1$, $v' = 1$:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+1) - (x^2-2x-4)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - x^2 + 2x + 4}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}.$$

(1,5 pt)

2 $f(0) = -4$ et $f'(0) = 2$, donc $T : y = 2(x-0) - 4$, soit $\boxed{y = 2x - 4}$. *(1 pt)*

3 Tangentes parallèles $\iff$ même coefficient directeur. On résout $f'(x) = 2$:

$$\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2} = 2 \iff x^2+2x+2 = 2x^2+4x+2 \iff x^2+2x = 0 \iff x(x+2) = 0.$$

$x = 0$ (c'est A) ou $x = -2$, et $f(-2) = \dfrac{4+4-4}{-1} = -4$. **Oui** : le point $B(-2\,;-4)$. *(1,25 pt)*

4 $f(x) - (2x-4) = \dfrac{x^2-2x-4-(2x-4)(x+1)}{x+1} = \dfrac{x^2-2x-4-(2x^2-2x-4)}{x+1} = \dfrac{-x^2}{x+1}$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-x^2$		$-$		$-$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-(2x-4)$		$+$	‖	$-$	0	$-$	

Interprétation : sur $]-\infty\,;-1[$, $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de T ; sur $]-1\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est **en dessous** de T ; en 0, $\mathcal{C}_f$ et T se touchent au point A. *(1,25 pt)*

DEVOIR SURVEILLÉ – CHAPITRE 4 | CORRIGÉ

1ère Spé Maths

Dérivation – DST type n° 1

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Date : ..... **Nom :** _____ **Durée :** 30 min **Note :** ..... / 10

Justifier chaque réponse. La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 : Dérivées (3,5 points)

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction puis donner sa fonction dérivée :

1. $f(x) = -3x^5 + 2x^3 - 6x + 4$
2. $h(x) = (3x+1)^3$
3. $g(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{x^3}{3}$
4. $k(x) = (2x+3)\sqrt{x}$

Solution

1. Dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = -15x^4 + 6x^2 - 6$. *(0,75 pt)*
2. $a = 3$, $g(X) = X^3$: dérivable sur $\mathbb{R}$, $h'(x) = 3 \times 3(3x+1)^2 = \boxed{9(3x+1)^2}$. *(1 pt)*
3. Dérivable sur $\mathbb{R}^*$: $g'(x) = -\dfrac{3}{x^2} + x^2$. *(0,75 pt)*
4. Dérivable sur $]0\,;+\infty[$: $k'(x) = 2\sqrt{x} + (2x+3) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{4x+2x+3}{2\sqrt{x}} = \boxed{\dfrac{6x+3}{2\sqrt{x}}}$. *(1 pt)*

Exercice 2 : Taux de variation (1,5 point)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + x - 3$.
Déterminer le taux de variation de f entre 2 et $2+h$ puis en déduire le nombre dérivé de f en 2.

Solution

$f(2) = 8 + 2 - 3 = 7$ et $f(2+h) = 2(4 + 4h + h^2) + 2 + h - 3 = 7 + 9h + 2h^2$.

$\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{9h + 2h^2}{h} = 9 + 2h \xrightarrow[h \to 0]{} 9$, donc $\boxed{f'(2) = 9}$. *(1,5 pt)*

Exercice 3 : Étude d'une fonction rationnelle (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 4}{x - 1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Donner l'ensemble de dérivabilité de f puis montrer que $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 5}{(x-1)^2}$.
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 0.
3. Existe-t-il un autre point de $\mathcal{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à T ? Si oui, préciser ses coordonnées.
4. Étudier le signe de $f(x) - (-5x - 4)$. Interpréter graphiquement le résultat.

Solution

1 Dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x+4)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-x-1-x^2-x-4}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-5}{(x-1)^2}.$$

(1,5 pt)

2 $f(0) = -4$ et $f'(0) = -5$: $\boxed{T : y = -5x - 4}$. *(1 pt)*

3 $f'(x) = -5 \iff x^2-2x-5 = -5(x^2-2x+1) \iff 6x^2-12x = 0 \iff 6x(x-2) = 0$.
$x = 0$ (c'est A) ou $x = 2$; $f(2) = \dfrac{4+2+4}{1} = 10$. **Oui** : $B(2\,;10)$. *(1,25 pt)*

4 $f(x) - (-5x-4) = \dfrac{x^2+x+4+(5x+4)(x-1)}{x-1} = \dfrac{x^2+x+4+5x^2-x-4}{x-1} = \dfrac{6x^2}{x-1}$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$6x^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-(-5x-4)$		$-$	0	$-$	‖	$+$	

Interprétation : sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;1[$, $\mathcal{C}_f$ est **en dessous** de T ; sur $]1\,;+\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de T ; en 0, ils se touchent en A. *(1,25 pt)*

DEVOIR SURVEILLÉ – CHAPITRE 4 | CORRIGÉ

1ère Spé Maths

Dérivation – DST type n° 2

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Date : ..... **Nom :** _____ **Durée :** 30 min **Note :** ..... / 10

Justifier chaque réponse. La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 : Dérivées (3,5 points)

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction puis donner sa fonction dérivée :

1. $f(x) = 2x^6 - 4x^3 + 3x - 7$
2. $h(x) = (1-4x)^5$
3. $g(x) = -\dfrac{2}{x} + 3\sqrt{x}$
4. $k(x) = (x^3+2)\sqrt{x}$

Solution

1. Dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 12x^5 - 12x^2 + 3$. *(0,75 pt)*
2. $a = -4$, $g(X) = X^5$: dérivable sur $\mathbb{R}$, $h'(x) = -4 \times 5(1-4x)^4 = \boxed{-20(1-4x)^4}$. *(1 pt)*
3. $\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$, donc g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$: $g'(x) = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$. *(0,75 pt)*
4. Dérivable sur $]0\,;+\infty[$: $k'(x) = 3x^2\sqrt{x} + \dfrac{x^3+2}{2\sqrt{x}} = \dfrac{6x^3+x^3+2}{2\sqrt{x}} = \boxed{\dfrac{7x^3+2}{2\sqrt{x}}}$. *(1 pt)*

Exercice 2 : Taux de variation (1,5 point)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.
Déterminer le taux de variation de f entre 3 et $3+h$ puis en déduire le nombre dérivé de f en 3.

Solution

$f(3) = -9 + 12 - 1 = 2$ et $f(3+h) = -(9 + 6h + h^2) + 12 + 4h - 1 = 2 - 2h - h^2$.

$\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \dfrac{-2h-h^2}{h} = -2 - h \xrightarrow[h\to 0]{} -2$, donc $\boxed{f'(3) = -2}$. *(1,5 pt)*

Exercice 3 : Étude d'une fonction rationnelle (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Donner l'ensemble de dérivabilité de f puis montrer que $f'(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 0. Que remarque-t-on ?
3. Existe-t-il un autre point de $\mathcal{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à T ? Si oui, préciser ses coordonnées.
4. Étudier le signe de $f(x) - 3$. Interpréter graphiquement le résultat.

Solution

1 Dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x+1) - (x^2+3x+3)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+5x+3-x^2-3x-3}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}.$$

(1,5 pt)

2 $f(0) = 3$ et $f'(0) = 0$: $\boxed{T : y = 3}$. La tangente est **horizontale**. *(1 pt)*

3 $f'(x) = 0 \iff x^2+2x = 0 \iff x(x+2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -2$.
$f(-2) = \dfrac{4-6+3}{-1} = -1$. **Oui** : $B(-2\,;-1)$, où la tangente est aussi horizontale. *(1,25 pt)*

4 $f(x) - 3 = \dfrac{x^2+3x+3-3(x+1)}{x+1} = \dfrac{x^2}{x+1}$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x^2		$+$		$+$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-3$		$-$	‖	$+$	0	$+$	

Interprétation : sur $]-\infty\,;-1[$, $\mathcal{C}_f$ est **en dessous** de T ; sur $]-1\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de T ; ils se touchent en $A(0\,;3)$. *(1,25 pt)*

DEVOIR SURVEILLÉ – CHAPITRE 4 | CORRIGÉ

1ère Spé Maths

Dérivation – DST type n° 3

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Date : ..... **Nom :** _____ **Durée :** 30 min **Note :** ..... / 10

Justifier chaque réponse. La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 : Dérivées (3,5 points)

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction puis donner sa fonction dérivée :

1. $f(x) = 4x^5 - \dfrac{x^4}{2} + 3x - 1$
2. $h(x) = (2x-7)^3$
3. $g(x) = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{6}{x}$
4. $k(x) = (x^2+x)\sqrt{x}$

Solution

1. Dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 20x^4 - 2x^3 + 3$. *(0,75 pt)*
2. $a=2$, $g(X)=X^3$: dérivable sur $\mathbb{R}$, $h'(x) = 2\times 3(2x-7)^2 = \boxed{6(2x-7)^2}$. *(1 pt)*
3. Dérivable sur $\mathbb{R}^*$: $g'(x) = \dfrac{2x}{3} - \dfrac{6}{x^2}$. *(0,75 pt)*
4. Dérivable sur $]0\,;+\infty[$: $k'(x) = (2x+1)\sqrt{x} + \dfrac{x^2+x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{4x^2+2x+x^2+x}{2\sqrt{x}} = \boxed{\dfrac{5x^2+3x}{2\sqrt{x}}}$. *(1 pt)*

Exercice 2 : Taux de variation (1,5 point)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 5x - 2$.
Déterminer le taux de variation de f entre -2 et $-2+h$ puis en déduire le nombre dérivé de f en -2.

Solution

$f(-2) = 4 - 10 - 2 = -8$ et $f(-2+h) = 4 - 4h + h^2 - 10 + 5h - 2 = -8 + h + h^2$.

$\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \dfrac{h+h^2}{h} = 1 + h \xrightarrow[h\to 0]{} 1$, donc $\boxed{f'(-2) = 1}$. *(1,5 pt)*

Exercice 3 : Étude d'une fonction rationnelle (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Donner l'ensemble de dérivabilité de f puis montrer que $f'(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$.
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 2.
3. Existe-t-il un autre point de $\mathcal{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à T ? Si oui, préciser ses coordonnées.
4. Montrer que $f(x) - (3x-5) = \dfrac{-2(x-2)^2}{x-1}$, puis étudier son signe. Interpréter graphiquement le résultat.

Solution

1 Dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2-3)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 + 3}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2}.$$

(1,5 pt)

2 $f(2) = 1$ et $f'(2) = 3$: $T : y = 3(x-2) + 1$, soit $\boxed{y = 3x - 5}$. *(1 pt)*

3 $f'(x) = 3 \iff x^2 - 2x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) \iff 2x^2 - 4x = 0 \iff 2x(x-2) = 0$.
$x = 2$ (c'est A) ou $x = 0$; $f(0) = \dfrac{-3}{-1} = 3$. **Oui** : $B(0\,;3)$. *(1,25 pt)*

4 $f(x) - (3x-5) = \dfrac{x^2 - 3 - (3x^2 - 8x + 5)}{x-1} = \dfrac{-2x^2 + 8x - 8}{x-1} = \dfrac{-2(x-2)^2}{x-1}$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-2(x-2)^2$		$-$		$-$	0	$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-(3x-5)$		$+$	‖	$-$	0	$-$	

Interprétation : sur $]-\infty\,;1[$, $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de T ; sur $]1\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est **en dessous** de T ; ils se touchent en $A(2\,;1)$. *(1,25 pt)*