DEVOIR SURVEILLÉ – CHAPITRE 12 | CORRIGÉ

1ère Spé Maths

Fonction exponentielle

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Date : ..... **Nom :** _____ **Durée :** 40 min **Note :** ..... / 10

Justifier chaque réponse. La calculatrice est autorisée.

Capacités évaluées

- Transformer une expression ; résoudre équations et inéquations avec l'exponentielle.
- Dériver et étudier une fonction comportant une exponentielle.
- Modéliser une décroissance exponentielle.

Exercice 1 : Calculs (3 points)

1 Simplifier $A = \dfrac{\mathrm{e}^{3x} \times \mathrm{e}^{-x+1}}{\mathrm{e}^{2x}}$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{x^2-1} = \mathrm{e}^3$.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{2x+1} > \mathrm{e}^{-x+7}$.

✔ Solution

1 $A = \mathrm{e}^{3x-x+1-2x} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$. *(1 pt)*

2 $x^2 - 1 = 3 \iff x^2 = 4 \iff x = -2$ ou $x = 2$. *(1 pt)*

3 $2x + 1 > -x + 7 \iff 3x > 6 \iff x > 2$: $S =]2\,;+\infty[$. *(1 pt)*

Exercice 2 : Étude d'une fonction (4 points)

Soit $f(x) = (x-3)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

1 Montrer que $f'(x) = (x-2)\mathrm{e}^x$.

2 Dresser le tableau de variation de f et préciser son minimum.

3 Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

4 Résoudre $f(x) \geqslant 0$.

✔ Solution

1 $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x-3)\mathrm{e}^x = (x-2)\mathrm{e}^x$. *(1 pt)*

2 $\mathrm{e}^x > 0$: f' a le signe de $x - 2$. f décroît sur $]-\infty\,;2]$, croît sur $[2\,;+\infty[$; minimum $f(2) = -\mathrm{e}^2 \approx -7{,}39$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$-\mathrm{e}^2$	↗	

(1,5 pt)

3 $f(0) = -3$, $f'(0) = -2$: $y = -2x - 3$. *(1 pt)*

4 $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f(x) \geqslant 0 \iff x - 3 \geqslant 0 \iff x \geqslant 3$. *(0,5 pt)*

Exercice 3 : Le café refroidit (3 points)

La température d'un café, en °C, t minutes après avoir été servi est $T(t) = 20 + 70\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$.

1 Calculer $T(0)$ et $T(10)$ (au dixième).

2 Étudier le sens de variation de T sur $[0\,;+\infty[$.

3 À la calculatrice, déterminer au bout de combien de minutes entières le café est à moins de 40°C.

✔ Solution

1 $T(0) = 90$; $T(10) = 20 + 70\mathrm{e}^{-1} \approx 45{,}8$°C. *(1 pt)*

2 $T'(t) = 70 \times (-0{,}1)\mathrm{e}^{-0{,}1t} = -7\mathrm{e}^{-0{,}1t} < 0$: T est décroissante. *(1 pt)*

3 $T(12) \approx 41{,}1$ et $T(13) \approx 39{,}1$: au bout de 13 minutes. *(1 pt)*