DEVOIR SURVEILLÉ – CHAPITRE 5 | CORRIGÉ

1ère Spé Maths

Inéquations du second degré

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Date : ..... **Nom :** _____ **Durée :** 40 min **Note :** ..... / 10

Justifier chaque réponse. La calculatrice est autorisée.

Capacités évaluées

- Factoriser un polynôme du second degré et étudier son signe.
- Résoudre une inéquation du second degré, et une inéquation avec un quotient.
- Résoudre un problème se ramenant à une inéquation du second degré.

Exercice 1 : Factorisation et signe (3 points)

Soit $P(x) = 2x^2 + x - 3$.

1. Vérifier que 1 est une racine de P, puis factoriser $P(x)$.
2. Dresser le tableau de signes de $P(x)$.
3. En déduire les solutions de l'inéquation $P(x) < 0$.

Solution

1. $P(1) = 2 + 1 - 3 = 0$, donc 1 est racine. Produit des racines $\dfrac{c}{a} = -\dfrac{3}{2}$, donc l'autre racine est $-\dfrac{3}{2}$.

$$P(x) = 2(x-1)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x-1)(2x+3).$$ *(1,5 pt)*

2. $a = 2 > 0$: positif à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(1 pt)

3. $S = \left]-\dfrac{3}{2}\,;1\right[$. *(0,5 pt)*

Exercice 2 : Inéquations (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $x^2 - 6x + 8 \leqslant 0$
2. $3x^2 + 2x + 1 > 0$
3. $\dfrac{2x-1}{x^2 - x - 6} \geqslant 0$

Solution

1. $\Delta = 36 - 32 = 4$; racines $\dfrac{6-2}{2} = 2$ et $\dfrac{6+2}{2} = 4$; $a > 0$: négatif entre les racines. $S = [2\,;4]$. *(1 pt)*

2 $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$ et $a = 3 > 0$: le trinôme est toujours strictement positif. $S = \mathbb{R}$. *(1 pt)*

3 Dénominateur : $\Delta = 1 + 24 = 25$, racines $\dfrac{1-5}{2} = -2$ et $\dfrac{1+5}{2} = 3$ (valeurs interdites) ; $a > 0$.
Numérateur : $2x - 1$ s'annule en $\dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-x-6		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{2x-1}{x^2-x-6}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

$S = \left]-2\,;\dfrac{1}{2}\right] \cup]3\,;+\infty[$. *(2 pts)*

Exercice 3 : Problème (3 points)

Un rectangle a un périmètre de 28 cm. On note x la longueur d'un de ses côtés, en cm.

1 Exprimer la longueur de l'autre côté en fonction de x, et préciser les valeurs possibles de x.

2 Pour quelles valeurs de x l'aire du rectangle est-elle strictement supérieure à 40 cm^2 ?

3 Résoudre l'inéquation « aire $\geqslant 49$ ». Que peut-on en conclure ?

✔ Solution

1 Le demi-périmètre vaut 14 : l'autre côté mesure $14 - x$, avec $x \in]0\,;14[$. *(0,5 pt)*

2 $x(14-x) > 40 \iff -x^2 + 14x - 40 > 0 \iff x^2 - 14x + 40 < 0$. $\Delta = 196 - 160 = 36$, racines 4 et 10 ; négatif entre les racines.
L'aire dépasse 40 cm^2 pour $x \in]4\,;10[$ (contenu dans $]0\,;14[$). *(1,5 pt)*

3 $x(14-x) \geqslant 49 \iff x^2 - 14x + 49 \leqslant 0 \iff (x-7)^2 \leqslant 0 \iff x = 7$.
L'aire vaut au plus 49 cm^2 : ce maximum est atteint seulement pour le carré de côté 7 cm. *(1 pt)*