DEVOIR SURVEILLÉ – CHAPITRE 6 | CORRIGÉ

1ère Spé Maths

Produit scalaire

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Date : ..... **Nom :** _____ **Durée :** 40 min **Note :** ..... / 10

Justifier chaque réponse. La calculatrice est autorisée.

Capacités évaluées

- Utiliser la définition avec le cosinus, la projection orthogonale, l'expression analytique.
- Utiliser la formule d'Al-Kashi pour calculer une longueur ou un angle.
- Reconnaître le cercle de diamètre $[AB]$: ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Exercice 1 : Dans un triangle (3 points)

ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 60°$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Calculer la valeur exacte de BC.
3. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, puis une mesure approchée au dixième de degré de l'angle $\widehat{ABC}$.

Solution

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 3 \times \dfrac{1}{2} = 6$. *(0,5 pt)*
2. Al-Kashi : $BC^2 = 16 + 9 - 2 \times 4 \times 3 \times \dfrac{1}{2} = 13$, donc $BC = \sqrt{13}$. *(1 pt)*
3. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}\left(BA^2 + BC^2 - AC^2\right) = \dfrac{1}{2}(16 + 13 - 9) = 10$.
   $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{10}{4\sqrt{13}} = \dfrac{5}{2\sqrt{13}} \approx 0{,}693$, donc $\widehat{ABC} \approx 46{,}1°$. *(1,5 pt)*

Exercice 2 : En coordonnées (4 points)

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-1\,;2)$, $B(3\,;4)$ et $C(1\,;-2)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?
2. Calculer la longueur BC.
3. En déduire que A appartient à un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.
4. Le point $D(4\,;-1)$ appartient-il à $\mathcal{C}$?

Solution

1. $\overrightarrow{AB}\,(4\,;2)$, $\overrightarrow{AC}\,(2\,;-4)$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 - 8 = 0$: ABC est rectangle en A. *(1 pt)*
2. $\overrightarrow{BC}\,(-2\,;-6)$: $BC = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. *(1 pt)*
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, donc A est sur le cercle de diamètre $[BC]$: centre le milieu $(2\,;1)$, rayon $\sqrt{10}$. *(1 pt)*
4. $\overrightarrow{DB}\,(-1\,;5)$, $\overrightarrow{DC}\,(-3\,;-1)$: $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = 3 - 5 = -2 \neq 0$: $D \notin \mathcal{C}$. *(1 pt)*

Exercice 3 : Dans un rectangle (3 points)

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 4$; I est le milieu de $[AB]$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ à l'aide d'une projection orthogonale.
2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DI}$.
3. En utilisant un repère orthonormé d'origine A, calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$. Les diagonales sont-elles perpendiculaires ?

✔ Solution

1. Le projeté de C sur (AB) est B : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = 36$. *(1 pt)*
2. Les projetés de D et I sur (AB) sont A et I : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = 6 \times 3 = 18$. *(1 pt)*
3. $A(0\,;0)$, $B(6\,;0)$, $C(6\,;4)$, $D(0\,;4)$: $\overrightarrow{AC}\,(6\,;4)$, $\overrightarrow{BD}\,(-6\,;4)$: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -36 + 16 = -20 \neq 0$. Les diagonales ne sont pas perpendiculaires. *(1 pt)*