DEVOIR SURVEILLÉ – CHAPITRE 7 | CORRIGÉ

1ère Spé Maths

Variable aléatoire réelle

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Date : . . . . . **Nom :** _____ **Durée :** 40 min **Note :** ..,.. / 10

Justifier chaque réponse. La calculatrice est autorisée.

Capacités évaluées

- Utiliser les notations $\{X = a\}$, $P(X \geqslant a)$... et traduire une phrase en symboles.
- Modéliser un jeu par une variable aléatoire et déterminer sa loi.
- Calculer et interpréter l'espérance, la variance et l'écart type ; utiliser leurs propriétés.

Exercice 1 : Loi et notations (3 points)

La loi d'une variable aléatoire X est :

x_i	-2	0	1	3
$P(X = x_i)$	$0{,}2$	$0{,}4$	a	$0{,}1$

1. Calculer a.
2. Calculer $P(X \geqslant 0)$ et $P(X < 1)$.
3. Traduire en symboles puis calculer la probabilité de l'événement « X vaut au moins 1 ».

Solution

1. $a = 1 - 0{,}2 - 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$. *(1 pt)*
2. $P(X \geqslant 0) = 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}8$; $P(X < 1) = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6$. *(1 pt)*
3. $P(X \geqslant 1) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$ (ou $1 - P(X < 1)$). *(1 pt)*

Exercice 2 : Un jeu (4 points)

Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules noires. Pour jouer, on paie 1 €, puis on tire successivement **avec remise** deux boules. On reçoit 5 € si les deux boules sont rouges, 1 € si une seule est rouge, et rien sinon. On note X le gain net du joueur.

1. Construire un arbre pondéré et déterminer la loi de X.
2. Calculer $E(X)$. Le jeu est-il favorable au joueur ?
3. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi au centième).

Solution

1. $P(R) = \frac{2}{5}$, $P(N) = \frac{3}{5}$ à chaque tirage. Deux rouges : $\frac{4}{25}$; une rouge : $2 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$; aucune : $\frac{9}{25}$.

x_i	-1	0	4
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

(1,5 pt)

2. $E(X) = \dfrac{-9 + 0 + 16}{25} = \dfrac{7}{25} = 0{,}28 > 0$: le jeu est favorable au joueur. *(1 pt)*
3. $E(X^2) = \dfrac{9 + 0 + 64}{25} = \dfrac{73}{25} = 2{,}92$; $V(X) = 2{,}92 - 0{,}28^2 = 2{,}8416$; $\sigma(X) \approx 1{,}69$ €. *(1,5 pt)*

Exercice 3 : Propriétés (3 points)

Une variable aléatoire X vérifie $E(X) = 5$ et $\sigma(X) = 2$.

1. Calculer $E(3X - 4)$, $V(3X - 4)$ et $\sigma(3X - 4)$.
2. Calculer $E(-X + 10)$ et $\sigma(-X + 10)$.
3. Déterminer les réels $a > 0$ et b tels que $Y = aX + b$ vérifie $E(Y) = 0$ et $\sigma(Y) = 1$.

Solution

1. $E(3X - 4) = 15 - 4 = 11$; $V(X) = 4$ donc $V(3X - 4) = 9 \times 4 = 36$; $\sigma(3X - 4) = 6$. *(1 pt)*
2. $E(-X + 10) = -5 + 10 = 5$; $\sigma(-X + 10) = |-1| \times 2 = 2$. *(1 pt)*
3. $\sigma(Y) = 2a = 1$ donc $a = \frac{1}{2}$; $E(Y) = \frac{5}{2} + b = 0$ donc $b = -\frac{5}{2}$. $Y = \frac{1}{2}X - \frac{5}{2}$. *(1 pt)*