CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 9

2BAC PC & SVT

Équations différentielles

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Rappels utilisés.

- Les solutions de $y' = ay + b$ $(a \neq 0)$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$.
- Pour $y'' + ay' + by = 0$, d'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ de discriminant Δ : si $\Delta > 0$: $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$; si $\Delta = 0$: $y = (Ax+B)e^{rx}$; si $\Delta < 0$, $r = p \pm iq$: $y = e^{px}\big(A\cos(qx) + B\sin(qx)\big)$ $(A, B \in \mathbb{R})$.

Exercice 1

Dire si chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, est solution ou non de l'équation différentielle : $y' = 3y - 2$.

a) $f(x) = e^{3x}$; b) $f(x) = e^{3x} - \dfrac{2}{3}$; c) $f(x) = 5e^{3x} + \dfrac{2}{3}$; d) $f(x) = 5e^{2x} + 3$.

Solution

- a) $f'(x) = 3e^{3x}$ et $3f(x) - 2 = 3e^{3x} - 2 \neq f'(x)$: **non**.
- b) $f'(x) = 3e^{3x}$ et $3f(x) - 2 = 3e^{3x} - 4$: **non**.
- c) $f'(x) = 15e^{3x}$ et $3f(x) - 2 = 15e^{3x} + 2 - 2 = 15e^{3x}$: **oui**.
- d) $f'(x) = 10e^{2x}$ et $3f(x) - 2 = 15e^{2x} + 7$: **non**.

Exercice 2

Résoudre chaque équation différentielle :

a) $y' = 2x - 5$; b) $y' = \sin(2x) - x + 1$; c) $y'' = -3 + e^{2x}$; d) $y'' = \cos x + e^x$.

Solution

(C, C_1, C_2 réels quelconques)

- a) $y = x^2 - 5x + C$; b) $y = -\dfrac{1}{2}\cos(2x) - \dfrac{x^2}{2} + x + C$.
- c) $y' = -3x + \dfrac{1}{2}e^{2x} + C_1$, puis $y = -\dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2$.
- d) $y' = \sin x + e^x + C_1$, puis $y = -\cos x + e^x + C_1 x + C_2$.

Exercice 3

Résoudre chaque équation différentielle :

a) $y' = \dfrac{5}{4}y$; b) $2y' = -7y$; c) $3\theta' = 5\theta$; d) $2\theta + 5\theta' = 0$; e) $y' = 2y + 3$; f) $4y' = 2y - 5$;

g) $\theta' = 5\theta - 1$; h) $2\theta = 5\theta' - \dfrac{1}{4}$.

Solution

($C \in \mathbb{R}$)

- a) $y = Ce^{\frac{5}{4}x}$; b) $y' = -\frac{7}{2}y : y = Ce^{-\frac{7}{2}x}$; c) $\theta' = \frac{5}{3}\theta : \theta = Ce^{\frac{5}{3}x}$; d) $\theta' = -\frac{2}{5}\theta : \theta = Ce^{-\frac{2}{5}x}$.
- e) $y = Ce^{2x} - \dfrac{3}{2}$; f) $y' = \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} : y = Ce^{\frac{x}{2}} + \dfrac{5}{2}$; g) $\theta = Ce^{5x} + \dfrac{1}{5}$.
- h) $\theta' = \frac{2}{5}\theta + \frac{1}{20} : \theta = Ce^{\frac{2}{5}x} - \dfrac{1/20}{2/5} = Ce^{\frac{2}{5}x} - \dfrac{1}{8}$.

Exercice 4

Déterminer la solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale donnée :

1. $(E_1) : y' = 7y$ et $y(0) = 1$;
2. $(E_2) : y' + \frac{1}{4}y = 0$ et $y(3) = -1$;
3. $(E_3) : 3y' + 7y = 0$ et $y(2) = -5$;
4. $(E_4) : y' = 4y - 3$ et $y(0) = -1$;
5. $(E_5) : y' - \frac{1}{4}y = 6$ et $y(-1) = 1$;
6. $(E_6) : -2y' + 11y = 4$ et $y(-2) = -3$.

Solution

1. $y = Ce^{7x}$ et $y(0) = C = 1 : y = e^{7x}$.
2. $y = Ce^{-\frac{x}{4}}$; $Ce^{-\frac{3}{4}} = -1 \iff C = -e^{\frac{3}{4}} : y = -e^{\frac{3-x}{4}}$.
3. $y' = -\frac{7}{3}y : y = Ce^{-\frac{7}{3}x}$; $Ce^{-\frac{14}{3}} = -5 : y = -5e^{-\frac{7}{3}(x-2)}$.
4. $y = Ce^{4x} + \frac{3}{4}$; $C + \frac{3}{4} = -1 \iff C = -\frac{7}{4} : y = -\frac{7}{4}e^{4x} + \frac{3}{4}$.
5. $y' = \frac{1}{4}y + 6 : y = Ce^{\frac{x}{4}} - 24$; $Ce^{-\frac{1}{4}} - 24 = 1 \iff C = 25e^{\frac{1}{4}} : y = 25e^{\frac{x+1}{4}} - 24$.
6. $y' = \frac{11}{2}y - 2 : y = Ce^{\frac{11}{2}x} + \frac{4}{11}$; $Ce^{-11} + \frac{4}{11} = -3 \iff C = -\frac{37}{11}e^{11} : y = -\frac{37}{11}e^{\frac{11}{2}(x+2)} + \frac{4}{11}$.

Exercice 5

f est la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 3y$ telle que $f'(1) = 2$. 1. Expliquer pourquoi $f(1) = \frac{2}{3}$. 2. Déterminer la fonction f.

Solution

1. $f'(1) = 3f(1)$, donc $f(1) = \frac{2}{3}$. 2. $f(x) = Ce^{3x}$ avec $Ce^3 = \frac{2}{3} : f(x) = \frac{2}{3}e^{3(x-1)}$.

Exercice 6

f est la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $3y' - 6y = 1$ telle que $f'(1) = 2$. 1. Expliquer pourquoi $f(1) = \frac{5}{6}$. 2. Déterminer la fonction f.

Solution

1. $3f'(1) - 6f(1) = 1$, soit $6 - 6f(1) = 1 : f(1) = \frac{5}{6}$.
2. $y' = 2y + \frac{1}{3} : f(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{6}$; $Ce^2 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \iff C = e^{-2} : f(x) = e^{2(x-1)} - \frac{1}{6}$ (on vérifie $f'(1) = 2$).

Exercice 7

Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2y' + 5y = 0$ telle que $y'(2) = 0$.

Solution

$y = Ce^{-\frac{5}{2}x}$, $y'(2) = -\frac{5}{2}Ce^{-5} = 0 \iff C = 0$: la solution est la fonction nulle $y = 0$.

Exercice 8

Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $\frac{3}{4}y' + y = 6$ telle que $y'(2) = 0$.

Solution

$y' = -\frac{4}{3}y + 8$: $y = Ce^{-\frac{4}{3}x} + 6$; $y'(2) = -\frac{4}{3}Ce^{-\frac{8}{3}} = 0 \iff C = 0$: la solution est la fonction constante $y = 6$.

Exercice 9

$f(x) = 5e^{-4x}$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer une équation différentielle de la forme $y' = ay$ dont f est une solution.

Solution

$f'(x) = -20e^{-4x} = -4f(x)$: f est solution de $y' = -4y$.

Exercice 10

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = \lambda f$, où λ est un nombre réel. $(\mathcal{C})$ est la courbe représentative de f dans un repère et la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x + 2$ est tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

Solution

La tangente en 0 a pour équation $y = f'(0)x + f(0)$, donc $f(0) = 2$ et $f'(0) = \frac{1}{3}$. Comme $f'(0) = \lambda f(0)$: $\lambda = \frac{1}{6}$. Ainsi $f(x) = Ce^{\frac{x}{6}}$ avec $C = f(0) = 2$: $f(x) = 2e^{\frac{x}{6}}$.

Exercice 11

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et $(\mathcal{C})$ sa courbe. Déterminer f sachant que : pour tout réel x, $2f(x) + f'(x) = 3$; et $(\mathcal{C})$ admet au point d'abscisse $x = 1$ une tangente de coefficient directeur 2.

Solution

$f' = -2f + 3$: $f(x) = Ce^{-2x} + \frac{3}{2}$, $f'(x) = -2Ce^{-2x}$. $f'(1) = 2 \iff -2Ce^{-2} = 2 \iff C = -e^2$: $f(x) = \frac{3}{2} - e^{-2(x-1)}$.

Exercice 12

f est la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : 2y' - 4y = 1$ telle que $f''(1) = -2$.

1. Démontrer que si y est une solution de (E), alors pour tout réel x : $y''(x) = 2y'(x)$.
2. En déduire que pour tout réel x : $y''(x) = 4y(x) + 1$.
3. En déduire $f'(1)$ et $f(1)$.
4. Déterminer la fonction f.

Solution

1. $y' = 2y + \frac{1}{2}$ est dérivable ; en dérivant : $y'' = 2y'$.
2. $y'' = 2\left(2y + \frac{1}{2}\right) = 4y + 1$.
3. $f''(1) = 2f'(1) = -2$: $f'(1) = -1$; $4f(1) + 1 = -2$: $f(1) = -\frac{3}{4}$.
4. $f(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{4}$; $Ce^2 - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} \iff C = -\frac{1}{2}e^{-2}$: $f(x) = -\frac{1}{2}e^{2(x-1)} - \frac{1}{4}$.

Exercice 13

Pour chaque question, cocher les réponses correctes.

1 L'équation différentielle $y' = 2y + 3$:
☐ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$; ☐ a une unique fonction solution sur $\mathbb{R}$; ☐ a une infinité de fonctions solutions sur $\mathbb{R}$.

2 La seule fonction f définie sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle $y' = -2y + 4$ et telle que $f(0) = 3$, est définie par :
☐ $f(x) = e^{-2x} - 4$; ☐ $f(x) = 3e^{-2x}$; ☐ $f(x) = e^{-2x} + 2$.

3 Une solution f de l'équation différentielle $y' = -3y + 4e^{-2x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :
☐ $f(x) = e^{-3x}$; ☐ $f(x) = -3x + 4$; ☐ $f(x) = 4e^{-2x}$.

4 Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 3y = 0$.
☐ La fonction $x \mapsto 2e^{-3x}$ est une solution de (E).
☐ La fonction $x \mapsto 2e^{3x}$ est une solution de (E).
☐ La fonction $x \mapsto \frac{1}{3}e^{-3x}$ est la solution de (E) telle que $f'(0) = 3$.
☐ La fonction $x \mapsto 2e^{3(1-x)}$ est la solution de (E) telle que $f(1) = 2$.

5 Soit l'équation différentielle $(E) : y' = 2y - 6$.
☐ Les courbes représentant les solutions ont une asymptote verticale.
☐ En chaque point d'ordonnée 2, les tangentes aux courbes représentant les solutions ont pour coefficient directeur -6.
☐ Les courbes représentant les solutions ont pour asymptote la droite d'équation $y = 3$.
☐ Il existe une solution dont la courbe passe par le point de coordonnées $(0; 3)$.

✔ Solution

1 ☒ une infinité de solutions : $y = Ce^{2x} - \frac{3}{2}$, $C \in \mathbb{R}$.

2 ☒ $f(x) = e^{-2x} + 2$: les solutions sont $Ce^{-2x} + 2$ et $f(0) = C + 2 = 3$ donne $C = 1$.

3 ☒ $f(x) = 4e^{-2x}$: $f'(x) = -8e^{-2x}$ et $-3f(x) + 4e^{-2x} = -12e^{-2x} + 4e^{-2x} = -8e^{-2x}$.
(Pour e^{-3x} : $-3f + 4e^{-2x} = -3e^{-3x} + 4e^{-2x} \neq f'$; pour $-3x + 4$: $f' = -3 \neq 9x - 12 + 4e^{-2x}$.)

4 Les solutions sont $x \mapsto Ce^{-3x}$. ☒ $2e^{-3x}$: oui. ☐ $2e^{3x}$: non. ☐ $\frac{1}{3}e^{-3x}$: $f'(0) = -1 \neq 3$, non (la bonne est $-e^{-3x}$).
☒ $2e^{3(1-x)} = 2e^3e^{-3x}$ est solution et vaut 2 en 1 : oui.

5 Les solutions sont $y = Ce^{2x} + 3$. ☐ pas d'asymptote verticale (fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$) ; ☐ en un point d'ordonnée 2, $y' = 2 \times 2 - 6 = -2 \neq -6$;
☒ $Ce^{2x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$: $y = 3$ est asymptote au voisinage de $-\infty$; ☒ $C = 0$ donne $y = 3$, qui passe par $(0; 3)$.

Exercice 14

Un corps de masse m est lâché en chute libre sans vitesse initiale. La vitesse $v : t \mapsto v(t)$ est solution de l'équation différentielle $y' + \dfrac{k}{m}y = g$, où k est le coefficient de freinage et g l'accélération de la pesanteur. Démontrer que : $v(t) = \dfrac{gm}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$.

✔ Solution

L'équation s'écrit $y' = -\frac{k}{m}y + g$; ses solutions sont $y = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \dfrac{g}{k/m} = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \dfrac{gm}{k}$. Sans vitesse initiale : $v(0) = C + \frac{gm}{k} = 0$, donc $C = -\frac{gm}{k}$ et $v(t) = \dfrac{gm}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$.

Exercice 15

On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population au temps t (en années) est notée $g(t)$, en centaines d'individus. On prend pour g une solution dans $[0;+\infty[$ de l'équation différentielle $(E) : y' = \dfrac{y}{4}$.

1. Résoudre (E).
2. Déterminer $g(t)$ lorsqu'à la date $t = 0$ la population comprend 100 rongeurs ($g(0) = 1$).
3. Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

Solution

1. $y = Ce^{\frac{t}{4}}$, $C \in \mathbb{R}$.
2. $g(0) = C = 1$: $g(t) = e^{\frac{t}{4}}$.
3. $g(t) > 3 \iff \frac{t}{4} > \ln 3 \iff t > 4\ln 3 \approx 4{,}39$: la population dépasse 300 rongeurs après environ 4,4 ans, c'est-à-dire au cours de la 5^{e} année.

Exercice 16

Résoudre chaque équation différentielle :

a) $y'' + y' - 30y = 0$; b) $y'' - 2y = 0$; c) $y'' + 14y' + 49y = 0$; d) $4y'' - 9y' = 0$; e) $4y'' + 16y' + 25y = 0$; f) $y'' + 9y = 0$.

Solution

$(A, B \in \mathbb{R})$

- a) $r^2 + r - 30 = (r-5)(r+6)$: $y = Ae^{5x} + Be^{-6x}$.
- b) $r^2 = 2$, $r = \pm\sqrt{2}$: $y = Ae^{\sqrt{2}x} + Be^{-\sqrt{2}x}$.
- c) $(r+7)^2 = 0$: $y = (Ax + B)e^{-7x}$.
- d) $r(4r-9) = 0$, $r \in \left\{0; \frac{9}{4}\right\}$: $y = A + Be^{\frac{9}{4}x}$.
- e) $\Delta = 256 - 400 = -144$, $r = \dfrac{-16 \pm 12i}{8} = -2 \pm \dfrac{3}{2}i$: $y = e^{-2x}\left(A\cos\frac{3x}{2} + B\sin\frac{3x}{2}\right)$.
- f) $r = \pm 3i$: $y = A\cos(3x) + B\sin(3x)$.

Exercice 17

Déterminer la solution de l'équation différentielle qui vérifie les conditions initiales données :

1. $(E_1) : y'' + 2y' = 0$; $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$;
2. $(E_2) : 4y'' - 3y = 0$; $y(0) = 1$ et $y'(0) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$;
3. $(E_3) : y'' + 25y = 0$; $y\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1$ et $y'\left(\frac{\pi}{5}\right) = -1$;
4. $(E_4) : y'' - 2y' + y = 0$; $y(1) = e$ et $y'(2) = 0$;
5. $(E_5) : y'' - y' - 6y = 0$; $y(0) = -4$ et $y'(0) = 0$;
6. $(E_6) : y'' - 4y' + 13y = 0$; $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Solution

1. $r(r+2) = 0$: $y = A + Be^{-2x}$; $A + B = 1$ et $-2B = 2$: $B = -1$, $A = 2$: $y = 2 - e^{-2x}$.
2. $r^2 = \frac{3}{4}$, $r = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$: $y = Ae^{\frac{\sqrt{3}}{2}x} + Be^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}$; $A + B = 1$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}(A - B) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, soit $A - B = -3$: $A = -1$, $B = 2$: $y = -e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x} + 2e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}$.
3. $y = A\cos(5x) + B\sin(5x)$, $y' = -5A\sin(5x) + 5B\cos(5x)$. En $\frac{\pi}{5}$: $y = -A = 1$ et $y' = -5B = -1$:

$y = -\cos(5x) + \dfrac{1}{5}\sin(5x)$.

4 $(r-1)^2 = 0 : y = (Ax+B)e^x$, $y' = (Ax+A+B)e^x$. $y(1) = (A+B)e = e$ et $y'(2) = (3A+B)e^2 = 0$: $A + B = 1$, $B = -3A$, d'où $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{2}$: $y = \dfrac{1}{2}(3-x)e^x$.

5 $(r-3)(r+2) = 0 : y = Ae^{3x} + Be^{-2x}$; $A + B = -4$ et $3A - 2B = 0 : A = -\frac{8}{5}$, $B = -\frac{12}{5}$: $y = -\dfrac{8}{5}e^{3x} - \dfrac{12}{5}e^{-2x}$.

6 $\Delta = 16 - 52 = -36$, $r = 2 \pm 3i : y = e^{2x}\big(A\cos(3x) + B\sin(3x)\big)$; $y(0) = A = 0$ et $y'(0) = 2A + 3B = 1$: $y = \dfrac{1}{3}e^{2x}\sin(3x)$.

Exercice 18

On considère l'équation différentielle $(E_m) : y'' - 2y' + (1-m)y = 0$, où m est un réel.

1 Résoudre (E_m) dans les cas suivants : $m = 1$; $m = 9$; $m = -16$.

2 Résoudre et discuter l'équation différentielle (E_m) suivant les valeurs de m.

Solution

Équation caractéristique : $r^2 - 2r + (1-m) = 0$, soit $(r-1)^2 = m$; discriminant $\Delta = 4m$.

1 $m = 1 : r(r-2) = 0 : y = A + Be^{2x}$. $m = 9 : r - 1 = \pm 3$, $r \in \{4; -2\} : y = Ae^{4x} + Be^{-2x}$. $m = -16 : r = 1 \pm 4i : y = e^x\big(A\cos(4x) + B\sin(4x)\big)$.

2
- Si $m > 0 : r = 1 \pm \sqrt{m} : y = Ae^{(1+\sqrt{m})x} + Be^{(1-\sqrt{m})x}$.
- Si $m = 0$: racine double $r = 1 : y = (Ax + B)e^x$.
- Si $m < 0 : r = 1 \pm i\sqrt{-m} : y = e^x\big(A\cos(\sqrt{-m}\,x) + B\sin(\sqrt{-m}\,x)\big)$.