CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 3

2BAC PC & SVT

# Étude de fonctions

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

## Exercice 1

Soit $f$ la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

1. Montrer que $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$ et que $f$ est paire.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.
3. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de $f$.
4. Déterminer la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.
5. Vérifier que $\forall x\in\mathbb{R}$ : $f''(x)=\dfrac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$, et étudier la convexité de $(\mathcal{C}_f)$.
6. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
7. Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $[0;+\infty[$.
   a) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.
   b) Montrer que $g^{-1}$ est dérivable en 0, et calculer $\left(g^{-1}\right)'(0)$.
   c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.
   d) Tracer $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

### ✔ Solution

1. $x^2+1>0$ pour tout réel $x$, donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et $f(-x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=f(x)$ : $f$ est paire.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$ : la droite $y=1$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ (et de $-\infty$ par parité).
3. $f'(x)=\dfrac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$, du signe de $x$.

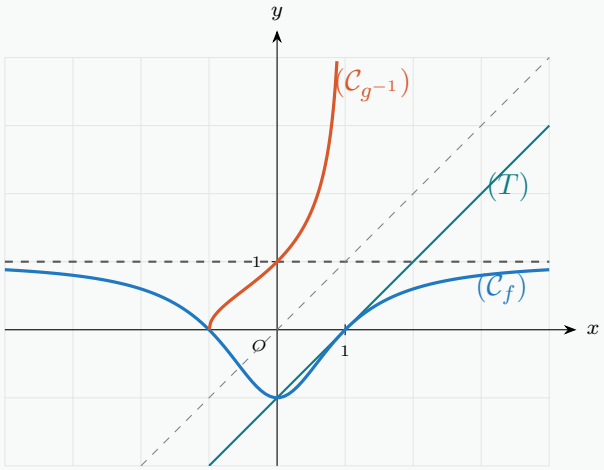
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ |

4. $f(1)=0$ et $f'(1)=\dfrac{4}{4}=1$ : $(T):y=x-1$.
5. $f''(x)=\dfrac{4(x^2+1)^2-4x\times 2(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^4}=\dfrac{4\left[(x^2+1)-4x^2\right]}{(x^2+1)^3}=\dfrac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$.
   $f''(x)$ a le signe de $1-3x^2$ : $(\mathcal{C}_f)$ est convexe sur $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ et concave sur $\left]-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ et sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right[$. $f''$ s'annule en changeant de signe en $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ : points d'inflexion $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{1}{2}\right)$ (car $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=-\frac{1}{2}$).
6. et 7.d) Voir la figure ci-dessous.
7. a) $g$ est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ : elle admet une réciproque définie sur

$J = g\big([0;+\infty[\big) = [-1;1[$.

b) $g(1) = 0$ et $g'(1) = 1 \neq 0$ : $g^{-1}$ est dérivable en $0$ et $\big(g^{-1}\big)'(0) = \dfrac{1}{g'(1)} = 1$.

c) Soient $x \in [-1;1[$ et $y \geq 0$ : $\dfrac{y^2-1}{y^2+1} = x \iff y^2(1-x) = 1+x \iff y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ (car $y \geq 0$, $1-x > 0$). Donc $g^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.




## Exercice 2

Soit $f$ la fonction numérique définie par : $f(x) = 1 + \sqrt{x^2-2x}$.

1. Montrer que $\mathcal{D}_f = ]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$.
2. Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
3. Montrer que la droite $(D) : y = x$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
4. Montrer que $f$ n'est pas dérivable à droite en 2. Interpréter graphiquement ce résultat.
5. a) Montrer que $f$ est strictement croissante sur $[2;+\infty[$.
   b) Donner le tableau de variations de $f$ sur $\mathcal{D}_f$.
6. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
7. Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $I = [2;+\infty[$.
   a) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.
   b) Donner le tableau de variations de $g^{-1}$.
   c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
   d) Tracer $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

### ✔ Solution

1. $x \in \mathcal{D}_f \iff x(x-2) \geq 0 \iff x \leq 0$ ou $x \geq 2$.
2. Pour $x \in \mathcal{D}_f$ : $2-x \in \mathcal{D}_f$ et $(2-x)^2 - 2(2-x) = x^2-2x$, donc $f(2-x) = f(x)$ : la droite $x = 1$ est axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
3. Pour $x \geq 2$ : $f(x) - x = 1 + \dfrac{(x^2-2x)-x^2}{\sqrt{x^2-2x}+x} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1-1 = 0$.
4. Pour $x > 2$ : $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \dfrac{\sqrt{x}\sqrt{x-2}}{x-2} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} \xrightarrow[x\to 2^+]{} +\infty$ : demi-tangente verticale au point $(2;1)$ (et, par symétrie, au point $(0;1)$).

**5** a) Sur $[2;+\infty[$, $x \mapsto x^2-2x=(x-1)^2-1$ est strictement croissante et positive, et $\sqrt{\ }$ est strictement croissante : $f$ est strictement croissante.

b) Par symétrie, $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ ; $f(0)=f(2)=1$.

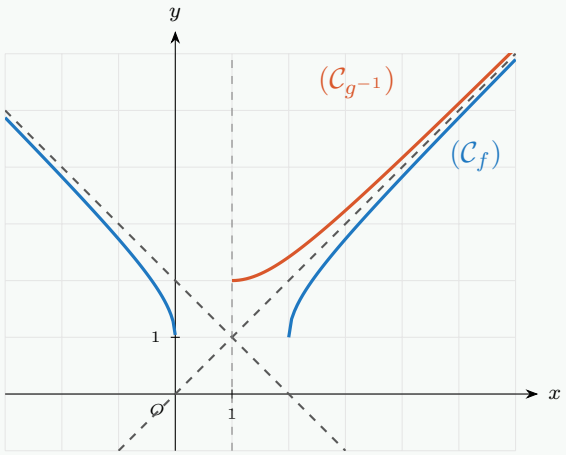
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**6** Par symétrie, $(D')$ : $y=2-x$ est asymptote au voisinage de $-\infty$. Figure ci-dessous.

**7** a) $g$ est continue et strictement croissante sur $[2;+\infty[$ : $J=[1;+\infty[$.

b) $g^{-1}$ est strictement croissante sur $[1;+\infty[$, de $g^{-1}(1)=2$ à $+\infty$.

c) $x\in J$, $y\geq 2$ : $1+\sqrt{y^2-2y}=x \iff y^2-2y=(x-1)^2 \iff (y-1)^2=(x-1)^2+1 \iff y=1+\sqrt{(x-1)^2+1}$ (car $y-1>0$).




## Exercice 3

**1** Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^3-3x-3$.

1.1. Étudier la monotonie de $g$ et dresser son tableau de variations.

1.2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $]2;3[$.

1.3. Déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

1.4. Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_g)$.

1.5. Montrer que $\Omega(0;-3)$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_g)$.

1.6. Déterminer la tangente à $(\mathcal{C}_g)$ en $\Omega$.

1.7. Tracer $(\mathcal{C}_g)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**2** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=x+\dfrac{3}{x}+\dfrac{3}{2x^2}$.

2.1. Calculer les limites de $f$ aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

2.2. Déterminer les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.

2.3. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^*$ : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$.

2.4. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de $f$.

2.5. Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de la droite $(\Delta)$ : $y=x$.

2.6. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^*$ : $f''(x)=\dfrac{3(2x+3)}{x^4}$ et étudier la convexité de $(\mathcal{C}_f)$.

2.7. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. On donne $\alpha\approx 2{,}1$ et $f(\alpha)\approx 3{,}8$.

✔ Solution

**Partie 1.**

1.1. $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ ; $g(-1) = -1$, $g(1) = -5$ ; limites : $-\infty$ en $-\infty$, $+\infty$ en $+\infty$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-5$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

1.2. Sur $]-\infty;1]$, $g(x) \leq -1 < 0$ : pas de solution. Sur $[1;+\infty[$, $g$ est continue, strictement croissante, $g\big([1;+\infty[\big) = [-5;+\infty[\ni 0$ : une unique solution $\alpha$. $g(2) = -1 < 0$ et $g(3) = 15 > 0$, donc $\alpha \in ]2;3[$.

1.3. $g(x) < 0$ si $x < \alpha$, $g(\alpha) = 0$, $g(x) > 0$ si $x > \alpha$.

1.4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$ : branches paraboliques de direction l'axe $(Oy)$ en $\pm\infty$.

1.5. $g''(x) = 6x$ s'annule en $0$ en changeant de signe, et $g(0) = -3$ : $\Omega(0;-3)$ est un point d'inflexion.

1.6. $g'(0) = -3$ : $(T) : y = -3x - 3$.

**Partie 2.**

2.1. $f(x) = \dfrac{2x^3+6x+3}{2x^2}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ; en $0$, le numérateur tend vers $3 > 0$ et $2x^2 \to 0^+$ : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

2.2. La droite $x = 0$ est asymptote verticale. $f(x) - x = \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{2x^2} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$ : $(\Delta) : y = x$ est asymptote oblique en $\pm\infty$.

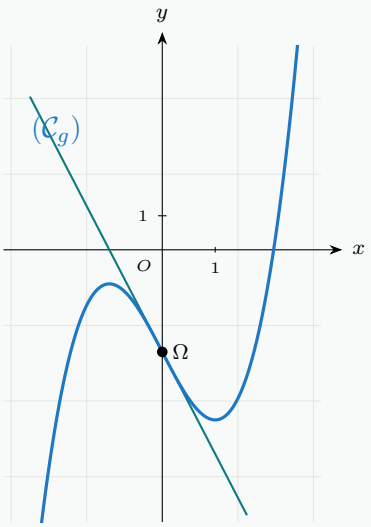
2.3. $f'(x) = 1 - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{3}{x^3} = \dfrac{x^3-3x-3}{x^3} = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

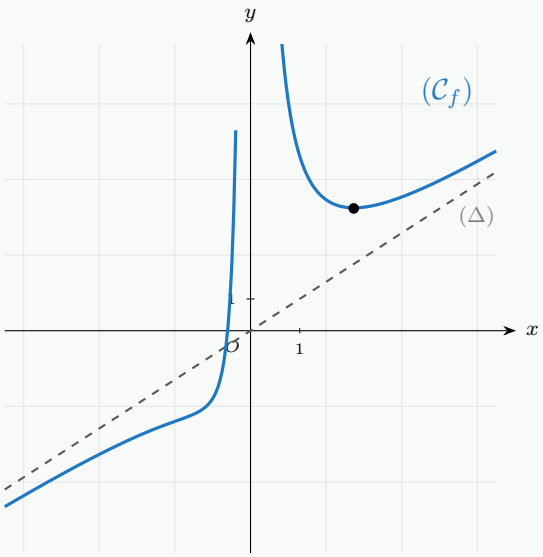
2.4. Pour $x < 0$ : $g(x) < 0$ et $x^3 < 0$, donc $f'(x) > 0$. Pour $0 < x < \alpha$ : $f'(x) < 0$ ; pour $x > \alpha$ : $f'(x) > 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

2.5. $f(x) - x = \dfrac{6x+3}{2x^2}$ a le signe de $2x+1$ : $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de $(\Delta)$ sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$, au-dessus sur $\left]-\frac{1}{2};0\right[\cup]0;+\infty[$, et la coupe au point $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

2.6. $f''(x) = \dfrac{6}{x^3} + \dfrac{9}{x^4} = \dfrac{3(2x+3)}{x^4}$ : $(\mathcal{C}_f)$ est concave sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$, convexe sur $\left[-\frac{3}{2};0\right[$ et sur $]0;+\infty[$ ; point d'inflexion $\left(-\frac{3}{2};-\frac{17}{6}\right)$.




## Exercice 4

**1** $g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

a) Étudier les limites de $g$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Étudier les variations de $g$ et dresser son tableau de variations.

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.

d) Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$.

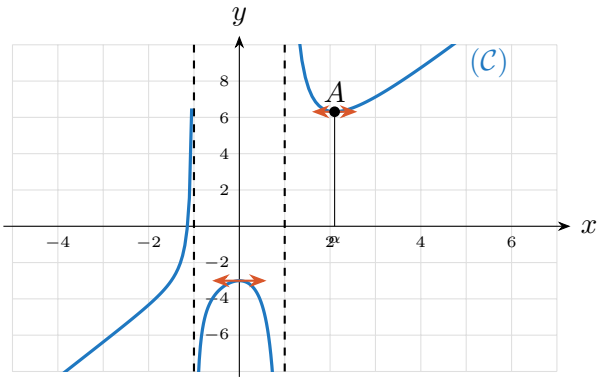
**2** $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

a) Étudier les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition. En déduire que $(\mathcal{C})$ admet deux asymptotes dont on donnera les équations.

b) Démontrer que, pour tout $x$ de $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ : $f'(x) = \dfrac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$.

c) Dresser le tableau de variations de $f$.

d) On a tracé ci-dessous la courbe de $f$. Montrer que le point $A$ de $(\mathcal{C})$ d'abscisse $\alpha$ a pour ordonnée $f(\alpha) = \dfrac{3(2\alpha + 3)}{\alpha^2 - 1}$.




### ✔ Solution

**1** C'est la fonction $g$ de l'exercice 3 :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

b) $g$ croît sur $]-\infty;-1]$, décroît sur $[-1;1]$, croît sur $[1;+\infty[$ ; $g(-1)=-1$, $g(1)=-5$.

c) Sur $]-\infty;1]$ : $g(x)\leq -1<0$. Sur $[1;+\infty[$ : $g$ continue, strictement croissante de $-5$ à $+\infty$. Donc $g(x)=0$ a une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$, et $\alpha\in]2;3[$.

d) $g(x)<0$ pour $x<\alpha$ et $g(x)>0$ pour $x>\alpha$.

**2** a) En $\pm\infty$ : $f(x)\sim\dfrac{2x^3}{x^2}=2x$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
En $1$ : numérateur $\to 5$ ; $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$.
En $-1$ : numérateur $\to 1$ ; $x^2-1\to 0^+$ si $x\to(-1)^-$ et $0^-$ si $x\to(-1)^+$ : $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=-\infty$.
Les droites $x=-1$ et $x=1$ sont asymptotes verticales.

b) $f'(x)=\dfrac{6x^2(x^2-1)-2x(2x^3+3)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{2x^4-6x^2-6x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{2x(x^3-3x-3)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

c) $f'(x)$ a le signe de $x\,g(x)$ : positif pour $x<0$ (deux facteurs négatifs), négatif sur $]0;\alpha[$, positif sur $]\alpha;+\infty[$. $f(0)=-3$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-3$ | $\searrow$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

d) $g(\alpha)=0\Rightarrow\alpha^3=3\alpha+3$, donc $2\alpha^3+3=6\alpha+9=3(2\alpha+3)$ et $f(\alpha)=\dfrac{3(2\alpha+3)}{\alpha^2-1}$.

## Exercice 5

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2-2x}$, et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**1** Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de $f$.

**2** a) Calculer les limites de $f$ aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

b) En déduire les équations des asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

**3** a) Montrer que pour tout réel $x$ de $\mathcal{D}_f$ : $f'(x)=\dfrac{(x+1)(2-4x)}{(x^2-2x)^2}$.

b) Donner le tableau de variations de $f$.

c) Donner la nature des tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ aux points d'abscisses $-1$ et $\frac{1}{2}$.

**4** Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et ses asymptotes dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ ($\|\vec{i}\|=2$ cm et $\|\vec{j}\|=1$ cm).
*On admet que $(\mathcal{C}_f)$ admet un seul point d'inflexion de coordonnées $(-1{,}9;1{,}1)$.*

**5** Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $I=]2;+\infty[$.

a) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.

b) Donner le tableau de variations de $g^{-1}$.

c) Comparer $g^{-1}(3{,}1234)$ et $g^{-1}(3{,}1324)$ en justifiant votre réponse.

d) Vérifier que $g^{-1}\left(\frac{19}{3}\right)=3$ et calculer $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{19}{3}\right)$.

✔ Solution

**1** $x^2-2x=x(x-2)\neq 0\iff x\neq 0$ et $x\neq 2$ : $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$.

**2** a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\dfrac{2x^2}{x^2}=2$. Numérateur $\to 1$ en $0$ et $\to 9$ en $2$ ; $x(x-2)>0$ hors de $[0;2]$ et $<0$ sur $]0;2[$ : $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$.

b) Asymptotes : $y=2$ (horizontale), $x=0$ et $x=2$ (verticales).

**3** a) $f'(x) = \dfrac{4x(x^2-2x)-(2x^2+1)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \dfrac{-4x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$ et $(x+1)(2-4x) = -4x^2-2x+2$.

b) $f'(x)$ a le signe de $(x+1)(2-4x)$ : négatif hors de $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$, positif entre. $f(-1)=1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{3}{2}}{-\frac{3}{4}} = -2$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | | | $+$ | $0$ | $-$ | | | | $-$ | |
| $f(x)$ | $2$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ | | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-2$ | $\searrow$ | $-\infty$ | | $+\infty$ | $\searrow$ | $2$ |

c) $f'(-1) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ : tangentes horizontales $y=1$ et $y=-2$.

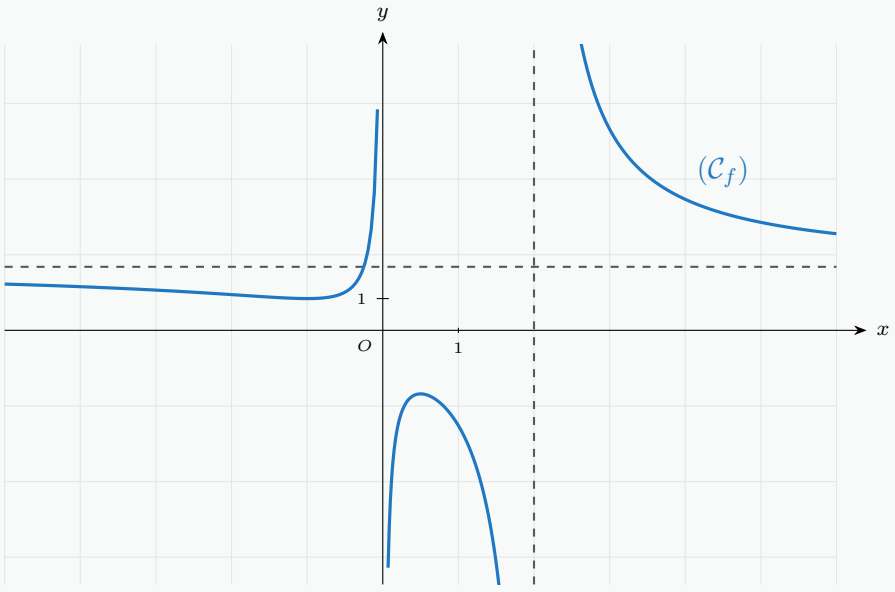
**4** Voir la figure.

**5** a) $g$ est continue et strictement décroissante sur $]2;+\infty[$ : $J = g(I) = ]2;+\infty[$.

b) $g^{-1}$ est strictement décroissante sur $]2;+\infty[$ (même sens que $g$), de $+\infty$ à 2.

c) $3{,}1234 < 3{,}1324$, deux éléments de $J$, et $g^{-1}$ est strictement décroissante : $g^{-1}(3{,}1234) > g^{-1}(3{,}1324)$.

d) $g(3) = \dfrac{19}{9-6} = \dfrac{19}{3}$ donc $g^{-1}\left(\frac{19}{3}\right) = 3$. $g'(3) = \dfrac{4\times(2-12)}{3^2} = -\dfrac{40}{9} \neq 0$, d'où $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{19}{3}\right) = -\dfrac{9}{40}$.




## Exercice 6

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = x\sqrt{x^2-2x}$, et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 1 cm).

**1** a) Déterminer $\mathcal{D}_f$ et calculer les limites de $f$ aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

b) Montrer que $f$ est continue sur $]-\infty;0]$ et sur $[2;+\infty[$.

c) Étudier la dérivabilité de $f$ à gauche en 0 et à droite en 2, et interpréter graphiquement chaque résultat.

**2** a) Vérifier que $\forall x \in \mathcal{D}_f \setminus \{0;2\}$ : $f'(x) = \dfrac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}}$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de $f$.

**3** a) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

b) Tracer soigneusement $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**4** Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $I=]-\infty;0]$.

a) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.

b) Dresser le tableau de variations de $g^{-1}$.

c) Vérifier que $g^{-1}(-\sqrt{3})=-1$ et déduire $\left(g^{-1}\right)'(-\sqrt{3})$.

✔ Solution

**1** a) $\mathcal{D}_f=]-\infty;0]\cup[2;+\infty[$ (comme à l'exercice 2). $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (un facteur tend vers $\pm\infty$, l'autre vers $+\infty$).

b) $x\mapsto x^2-2x$ est continue et positive sur ces intervalles ; $\sqrt{\ }$ et le produit conservent la continuité.

c) À gauche en $0$ : $\dfrac{f(x)}{x}=\sqrt{x^2-2x}\xrightarrow[x\to0^-]{}0$ : $f'_g(0)=0$, demi-tangente horizontale en $O$.

À droite en $2$ : $\dfrac{f(x)}{x-2}=\dfrac{x\sqrt{x}\sqrt{x-2}}{x-2}=\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}\xrightarrow[x\to2^+]{}+\infty$ : demi-tangente verticale au point $(2;0)$.

**2** a) $f'(x)=\sqrt{x^2-2x}+x\cdot\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{(x^2-2x)+(x^2-x)}{\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}}$.

b) $2x^2-3x=x(2x-3)>0$ pour $x<0$ et pour $x>2$ : $f$ est strictement croissante sur $]-\infty;0]$ et sur $[2;+\infty[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | | $+$ | | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

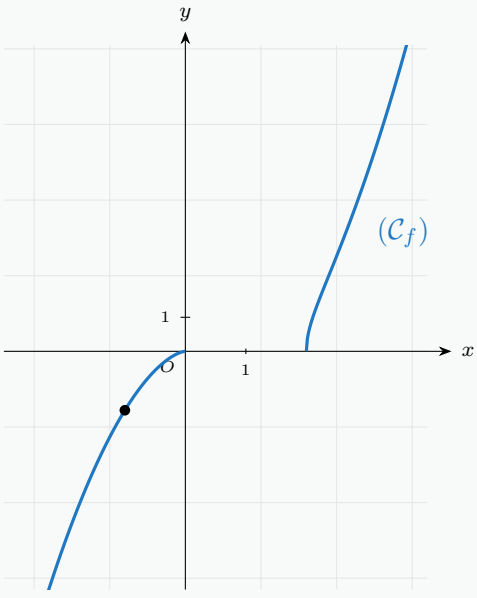
**3** a) $\dfrac{f(x)}{x}=\sqrt{x^2-2x}\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}+\infty$ : branches paraboliques de direction $(Oy)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Voir la figure.

**4** a) $g$ est continue et strictement croissante sur $]-\infty;0]$ : $J=]-\infty;0]$.

b) $g^{-1}$ est strictement croissante sur $]-\infty;0]$, de $-\infty$ à $0$.

c) $g(-1)=-1\times\sqrt{3}=-\sqrt{3}$, donc $g^{-1}(-\sqrt{3})=-1$. $g'(-1)=\dfrac{2+3}{\sqrt{3}}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}\neq0$ : $\left(g^{-1}\right)'(-\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.



## Exercice 7

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+2x} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**1** Montrer que $f$ est continue en $0$.

**2** a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que $(D) : y = x+1$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

**3** Étudier la dérivabilité de $f$ à gauche et à droite en $0$, et interpréter chaque résultat graphiquement.

**4** a) Vérifier que $\forall x \in ]0;+\infty[ : f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$.

b) Vérifier que $\forall x \in ]-\infty;0[ : f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

c) En déduire la monotonie de $f$ sur $[0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0]$.

**5** Dresser le tableau de variations de $f$.

**6** Déterminer l'équation réduite de la tangente $(T)$ à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $-1$.

**7** Tracer $(D)$, $(T)$ et $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
*On admet que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion d'abscisse comprise entre $-1$ et $0$.*

**8** Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $I = ]-\infty;0[$.

a) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.

b) Tracer $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

c) Vérifier que $g(-1) = \frac{1}{2}$ et déduire $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)$.

d) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

### ✔ Solution

**1** $f(0) = 0$ ; $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x^2+2x} = 0$ : $f$ est continue en $0$.

**2** a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) $f(x) - (x+1) = \dfrac{(x^2+2x)-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x}+x+1} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+x+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

**3** À droite : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt{x}\sqrt{x+2}}{x} = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty$ : demi-tangente verticale en $O$.

À gauche : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x}{x^2+1} \xrightarrow[x\to0^-]{} 0$ : $f'_g(0) = 0$, demi-tangente horizontale en $O$.

**4** a) $f'(x) = \dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$.

b) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1) - x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

c) $f' > 0$ sur $]0;+\infty[$ : $f$ strictement croissante sur $[0;+\infty[$ ; $f' < 0$ sur $]-\infty;0[$ : strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.

**5**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**6** $f(-1) = \frac{1}{2}$, $f'(-1) = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$ : $(T) : y = -\dfrac{1}{2}(x+1) + \dfrac{1}{2}$, soit $y = -\dfrac{1}{2}x$.

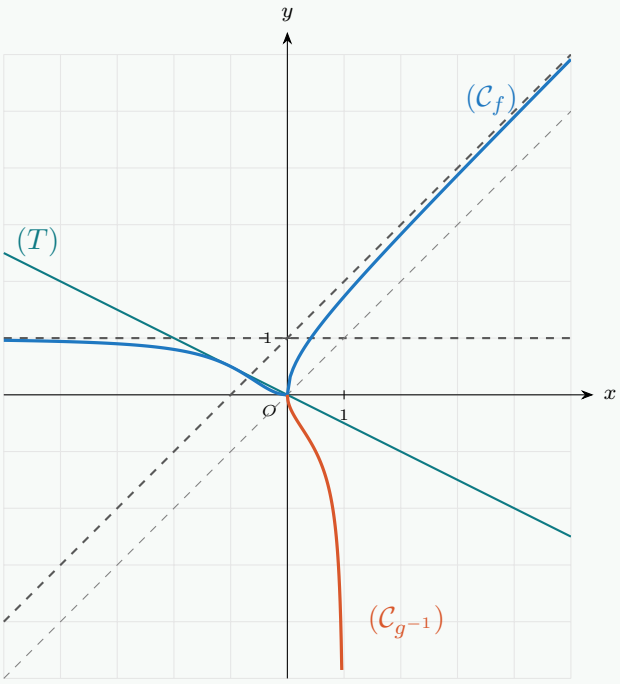
**7** Voir la figure.

**8** a) $g$ est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ : $J=]0;1[$.

b) Symétrique de $(\mathcal{C}_g)$ par rapport à la droite $y=x$ (figure).

c) $g(-1)=\frac{1}{2}$ et $g'(-1)=-\frac{1}{2}\neq 0$ : $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)=-2$.

d) $x\in]0;1[$, $y<0$ : $\dfrac{y^2}{y^2+1}=x \iff y^2=\dfrac{x}{1-x} \iff y=-\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$.




## Exercice 8

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=x-1+2\sqrt{1-x} & \text{si } x<1 \\ f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3+1} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 1 cm).

**1** Montrer que $f$ est continue en 1.

**2** a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

b) Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

**3** Étudier la dérivabilité de $f$ à gauche et à droite en 1, et interpréter chaque résultat graphiquement.

**4** a) Montrer que $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

b) Vérifier que $\forall x\in]-\infty;1[$ : $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x}\cdot\left(1+\sqrt{1-x}\right)}$.

c) En déduire la monotonie de $f$ sur les intervalles $]-\infty;0]$ et $[0;1]$.

d) Dresser le tableau de variations de $f$.

**5** Calculer $f(-3)$, puis tracer soigneusement la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**6** Étudier graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

✔ Solution

**1** $f(1)=0$ et $\lim\limits_{x\to1^-}\left(x-1+2\sqrt{1-x}\right)=0=f(1)$ ; à droite $f$ est rationnelle donc continue : $f$ est continue en 1.

**2** a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. Pour $x<1$ : $f(x)=\sqrt{1-x}\left(2-\sqrt{1-x}\right)$ ; quand $x\to-\infty$, $\sqrt{1-x}\to+\infty$

et $2-\sqrt{1-x}\to-\infty$ : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

b) En $+\infty$ : asymptote horizontale $y=1$. En $-\infty$ : $\dfrac{f(x)}{x}=1-\dfrac{1}{x}+2\dfrac{\sqrt{1-x}}{x}\to 1$ et $f(x)-x=-1+2\sqrt{1-x}\to+\infty$ : branche parabolique de direction la droite $y=x$.

**3** À droite : $\dfrac{f(x)}{x-1}=\dfrac{x^2+x+1}{x^3+1}\xrightarrow[x\to1^+]{}\dfrac{3}{2}$ : $f'_d(1)=\frac{3}{2}$, demi-tangente de pente $\frac{3}{2}$.

À gauche : $\dfrac{f(x)}{x-1}=1+\dfrac{2\sqrt{1-x}}{x-1}=1-\dfrac{2}{\sqrt{1-x}}\xrightarrow[x\to1^-]{}-\infty$ : demi-tangente verticale au point $(1;0)$.

**4** a) Pour $x\geq1$ : $f(x)=1-\dfrac{2}{x^3+1}$ ; $x\mapsto x^3+1$ est strictement croissante et positive, donc $f$ est strictement croissante.

b) $f'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}}=\dfrac{(1-x)-1}{\sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x}+1\right)}=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x}\left(1+\sqrt{1-x}\right)}$.

c) $f'(x)$ a le signe de $-x$ : $f$ croissante sur $]-\infty;0]$, décroissante sur $[0;1]$.

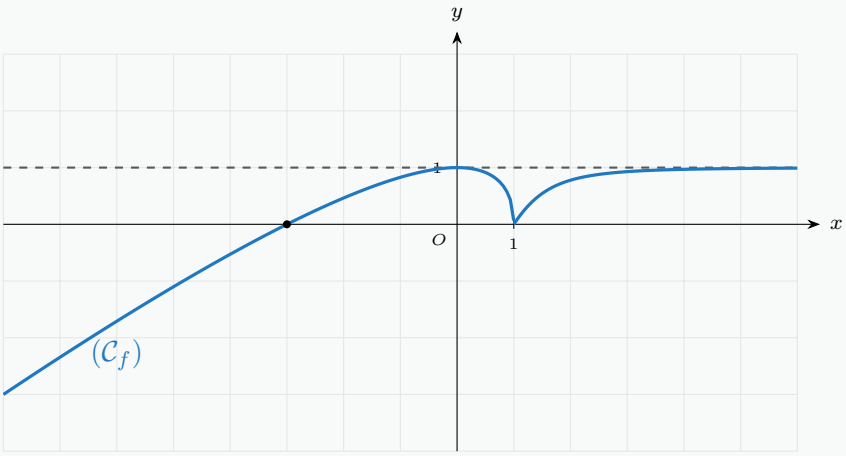
d) $f(0)=-1+2=1$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |

**5** $f(-3)=-4+2\times2=0$. Figure ci-dessous.

**6** D'après le tableau :

- $m>1$ ou $m<0$ : une solution ;
- $m=1$ : une solution ($x=0$) ;
- $0<m<1$ : trois solutions ;
- $m=0$ : deux solutions ($x=-3$ et $x=1$).




## Exercice 9

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases}f(x)=x-\sqrt{2x-1} & \text{si } x\geq1\\ f(x)=(1-x)\left(\sqrt{1-x}-2\right)^2 & \text{si } x<1\end{cases}$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 1 cm).

**1** Montrer que $f$ est continue en 1.

**2** a) Calculer les limites $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=-\infty$, et en déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera la direction.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et en déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$ dont on précisera la direction.

**3** Étudier la dérivabilité de $f$ à gauche et à droite en 1, et interpréter chaque résultat graphiquement.

**4** a) Vérifier que $\forall x\in]1;+\infty[ : f'(x)=\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}\cdot\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}$.

b) Vérifier que $\forall x\in]-\infty;1[ : f'(x)=\dfrac{-2x(x+3)}{\left(\sqrt{1-x}+2\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)}$.

c) En déduire la monotonie de $f$ sur les intervalles $[1;+\infty[$ et $]-\infty;1]$.

**5** Dresser le tableau de variations de $f$.

**6** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
*On admet que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion d'abscisse comprise entre $-2$ et $-1$.*

**7** Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $I=[1;+\infty[$.

a) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.

b) Tracer $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

✔ **Solution**

Pour $x<1$, posons $s=\sqrt{1-x}>0$ : $s^2=1-x$ et $f(x)=s^2(s-2)^2$.

**1** $f(1)=1-1=0$ et $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=0\times4=0$ : $f$ est continue en 1.

**2** a) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ (car $s\to+\infty$). Pour $x\geq1$ : $f(x)=x\left(1-\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}\right)$ et $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}=\sqrt{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}\to0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

b) $\dfrac{f(x)}{x}=1-\sqrt{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}\to1$ et $f(x)-x=-\sqrt{2x-1}\to-\infty$ : branche parabolique de direction la droite $y=x$.

c) $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1-x}{x}(s-2)^2$ ; $\dfrac{1-x}{x}\to-1$ et $(s-2)^2\to+\infty$ : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$, branche parabolique de direction $(Oy)$.

**3** À droite : $x-\sqrt{2x-1}=\dfrac{x^2-(2x-1)}{x+\sqrt{2x-1}}=\dfrac{(x-1)^2}{x+\sqrt{2x-1}}$, donc $\dfrac{f(x)}{x-1}=\dfrac{x-1}{x+\sqrt{2x-1}}\to0$ : $f'_d(1)=0$ (demi-tangente horizontale).

À gauche : $\dfrac{f(x)}{x-1}=-(s-2)^2\to-4$ : $f'_g(1)=-4$. $f$ n'est pas dérivable en 1 : point anguleux.

**4** a) $f'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}=\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{2x-1}}=\dfrac{2x-2}{\sqrt{2x-1}\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}$.

b) $f(x)=\left(s^2-2s\right)^2$ avec $s'=-\dfrac{1}{2s}$ : $f'(x)=2(s^2-2s)(2s-2)\times\left(-\dfrac{1}{2s}\right)=-2(s-2)(s-1)$.

Or $s^2-4=-(x+3)$ et $s^2-1=-x$, donc $s-2=\dfrac{-(x+3)}{s+2}$ et $s-1=\dfrac{-x}{s+1}$, d'où $f'(x)=\dfrac{-2x(x+3)}{(s+2)(s+1)}$.

c) Sur $[1;+\infty[$ : $f'\geq0$, $f$ croissante. Sur $]-\infty;1[$ : $f'(x)$ a le signe de $-x(x+3)$ : $f$ décroissante sur $]-\infty;-3]$, croissante sur $[-3;0]$, décroissante sur $[0;1]$.

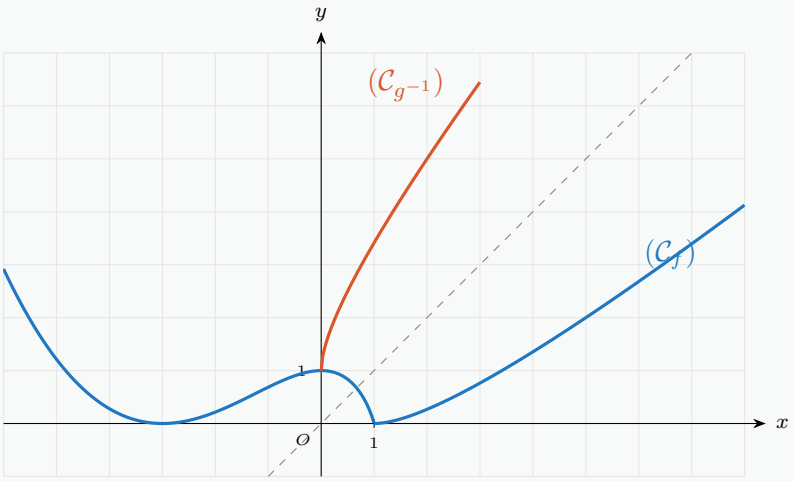
**5** $f(-3)=4(2-2)^2=0$, $f(0)=1\times(1-2)^2=1$, $f(1)=0$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**6** Voir la figure.

**7** a) $g$ est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ : $J=[0;+\infty[$.

b) $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ est la symétrique de $(\mathcal{C}_g)$ par rapport à $y=x$. (On trouve $g^{-1}(x)=1+x+\sqrt{2x}$, cf. exercice 24.)




## Exercice 10

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=x-2\sqrt{x}+1 & \text{si } x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}+1 & \text{si } x<0 \end{cases}$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 1 cm).

**1** a) Calculer les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Étudier la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

c) Montrer que pour tout réel $x$ de $]-\infty;0[$ : $f(x)+x-1=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}$.

d) Montrer que la droite $(\Delta)$ : $y=-x+1$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.

e) Étudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à $(\Delta)$ sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

**2** a) Montrer que $f$ est continue en $0$.

b) Étudier la dérivabilité de $f$ à gauche et à droite en $0$, et interpréter chaque résultat graphiquement.

**3** a) Vérifier que pour tout $x$ de $]0;+\infty[$ : $f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$.

b) Vérifier que pour tout $x$ de $]-\infty;0[$ : $f'(x)=\dfrac{x(x^2+2)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

c) Étudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variations.

**4** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
*On admet que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion d'abscisse comprise entre $-2$ et $-1$.*

**5** Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $[1;+\infty[$.

a) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle à déterminer.

b) Tracer $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

✔ Solution

Pour $x \geq 0$ : $f(x) = (\sqrt{x}-1)^2$.

**1** a) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{|x|}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \to +\infty$ : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x}-1)^2 = +\infty$.

b) $\dfrac{f(x)}{x} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} \to 1$ et $f(x) - x = 1 - 2\sqrt{x} \to -\infty$ : branche parabolique de direction $y = x$.

c) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)} = \dfrac{x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1-x^2)} = x + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = f(x) + x - 1.$

d) Quand $x \to -\infty$ : le dénominateur tend vers $+\infty$ plus vite que $|x|$ (il est $\geq |x| \times 2|x|$), donc $f(x) - (-x+1) \to 0$.

e) Pour $x < 0$ : $f(x) - (-x+1) < 0$ (numérateur $x < 0$, dénominateur $> 0$) : $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de $(\Delta)$.

**2** a) $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 + 1 = 1$ : $f$ est continue en $0$.

b) À droite : $\dfrac{f(x)-1}{x} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}} \to -\infty$ : demi-tangente verticale en $(0;1)$. À gauche : $\dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \to 0$ : $f'_g(0) = 0$, demi-tangente horizontale.

**3** a) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)}$.

b) $f'(x) = \dfrac{2x\sqrt{x^2+1} - x^2\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{2x(x^2+1)-x^3}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x(x^2+2)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

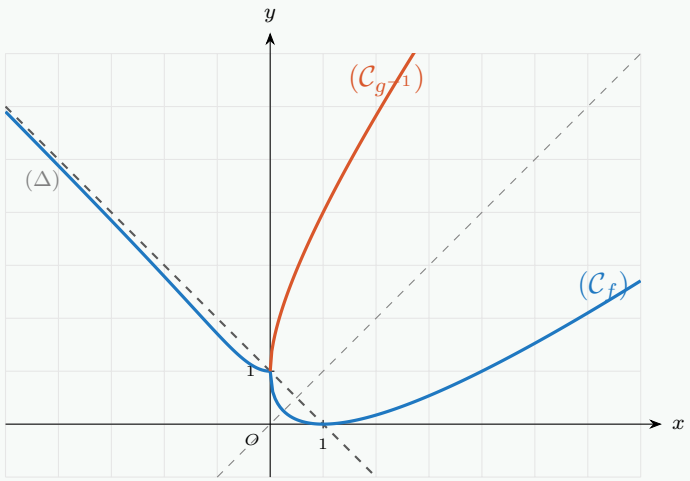
c) $f' < 0$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;1[$, $f' > 0$ sur $]1;+\infty[$ ; $f(1) = 0$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**4** Voir la figure.

**5** a) $g$ est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ : $J = [0;+\infty[$ (et $g^{-1}(x) = (1+\sqrt{x})^2$).

b) Figure.



## Exercice 11

**I)** Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(x) = 3x - 4x\sqrt{x} - \dfrac{1}{4}$.

**1** Donner le tableau de variations de la fonction $h$ sur $\mathbb{R}^+$.

**2** En déduire que pour tout $x$ de $\mathbb{R}^+$ : $h(x) \leq 0$.

**II)** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = (4x-1)\sqrt{x} - 4x^2 + \dfrac{1}{2}$, et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 2 cm).

**1** a) Calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Étudier la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

**2** Étudier la dérivabilité de $f$ à droite en $0$, et interpréter ce résultat graphiquement.

**3** a) Vérifier que pour tout $x$ de $]0;+\infty[$ : $f'(x) = \dfrac{2h(x)}{\sqrt{x}}$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

**4** Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un unique point dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$.

**5** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
*On admet que $(\mathcal{C}_f)$ admet un seul point d'inflexion de coordonnées $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.*

**6** Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$.

a) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle à déterminer.

b) Tracer $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

### ✔ Solution

**I)**

**1** $h(x) = 3x - 4x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}$ ; $h'(x) = 3 - 6\sqrt{x}$, nul pour $x = \frac{1}{4}$. $h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} - 4\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$ ; $h(0) = -\frac{1}{4}$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(x)$ | $-\frac{1}{4}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**2** Le maximum de $h$ sur $\mathbb{R}^+$ est $h\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ : $h(x) \leq 0$.

**II)**

**1** a) $f(x) = x^2\left(\dfrac{4}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x\sqrt{x}} - 4 + \dfrac{1}{2x^2}\right) \to -\infty$.

b) $\dfrac{f(x)}{x} = 4\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 4x + \dfrac{1}{2x} = \sqrt{x}\,(4 - 4\sqrt{x}) - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2x} \to -\infty$ : branche parabolique de direction $(Oy)$.

**2** $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{(4x-1)}{\sqrt{x}} - 4x \xrightarrow[x\to0^+]{} -\infty$ : demi-tangente verticale au point $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

**3** a) $f'(x) = 4\sqrt{x} + \dfrac{4x-1}{2\sqrt{x}} - 8x = \dfrac{8x + 4x - 1 - 16x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{4\left(3x - 4x\sqrt{x} - \frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2h(x)}{\sqrt{x}}$.

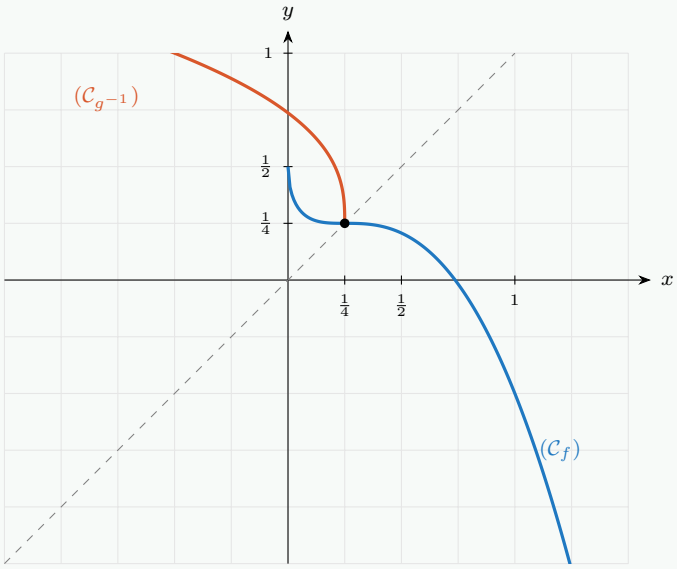
b) $f'(x) \leq 0$, nul seulement en $\frac{1}{4}$ : $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, de $f(0) = \frac{1}{2}$ à $-\infty$ (avec $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$).

**4** $f$ est continue et strictement décroissante ; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \approx 0{,}21 > 0$ et $f\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{3} - \frac{7}{4} \approx -0{,}018 < 0$ : $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse dans $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$.

**5** Voir la figure.

**6** a) $g$ est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ : $J=\left]-\infty;\frac{1}{4}\right]$.

b) Symétrique de $(\mathcal{C}_g)$ par rapport à $y=x$ (figure).




## Exercice 12

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x)=x+3-\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$, et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 1 cm).

**1** Montrer que l'ensemble de définition de $f$ est : $\mathcal{D}_f=]-\infty;0]\cup]2;+\infty[$.

**2** Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, et interpréter graphiquement ce résultat.

**3** Calculer les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

**4** Montrer que la droite $(\Delta)$ : $y=x+2$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

**5** Préciser la position de $(\Delta)$ par rapport à $(\mathcal{C}_f)$ sur les intervalles $]-\infty;0]$ et $]2;+\infty[$.

**6** Étudier la dérivabilité de $f$ à gauche en $0$, et interpréter ce résultat graphiquement.

**7** Vérifier que pour tout $x$ de $\mathcal{D}_f\setminus\{0\}$ : $f'(x)=1+\dfrac{1}{(x-2)^2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}$.

**8** Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

**9** Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $]-3;-2[$.

**10** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
*On admet que $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un autre point d'abscisse $\beta$ comprise entre 2 et $\frac{5}{2}$.*

**11** Discuter, suivant les valeurs de $m$, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

**12** Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $]2;+\infty[$.

a) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle à déterminer.

b) Vérifier que $g^{-1}(0)=\beta$ et montrer que : $\left(g^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{(\beta-2)^2(\beta+3)}}$.

✔ **Solution**

Notons $u(x)=\dfrac{x}{x-2}=1+\dfrac{2}{x-2}$.

**1** $x \in \mathcal{D}_f \iff x \neq 2$ et $\dfrac{x}{x-2} \geq 0 \iff x \leq 0$ ou $x > 2$ (tableau de signes).

**2** $\lim\limits_{x \to 2^+} u(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$ : asymptote verticale $x = 2$.

**3** $u(x) \to 1$ en $\pm\infty$ : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

**4** $f(x) - (x+2) = 1 - \sqrt{u(x)} \to 1 - 1 = 0$ en $\pm\infty$.

**5** Pour $x \leq 0$ : $x - 2 < 0$, donc $u(x) = 1 + \frac{2}{x-2} < 1$ et $f(x) - (x+2) > 0$ : $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\Delta)$. Pour $x > 2$ : $u(x) > 1$ : $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de $(\Delta)$.

**6** $f(0) = 3$. Pour $x < 0$ : $\sqrt{u(x)} = \dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{2-x}}$ et $\dfrac{f(x)-3}{x} = 1 - \dfrac{\sqrt{-x}}{x\sqrt{2-x}} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{-x}\sqrt{2-x}} \xrightarrow[x \to 0^-]{} +\infty$ : demi-tangente verticale au point $(0;3)$.

**7** $u'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^2}$ et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}} = \dfrac{-1}{(x-2)^2\sqrt{u}}$, donc $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{(x-2)^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{u}} = 1 + \dfrac{1}{(x-2)^2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}$.

**8** $f'(x) > 0$ : $f$ est strictement croissante sur $]-\infty;0]$ et sur $]2;+\infty[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

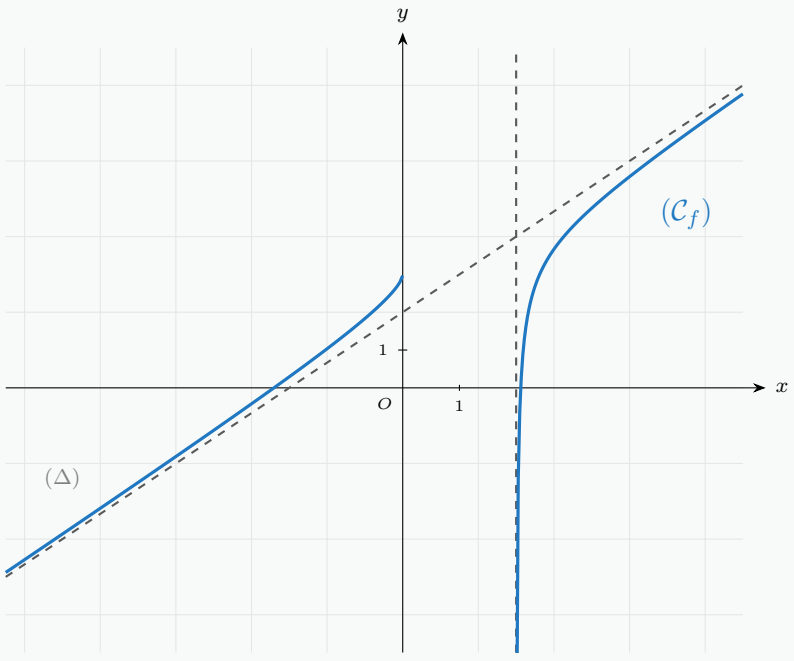
**9** $f$ est continue et strictement croissante sur $[-3;-2]$ ; $f(-3) = -\sqrt{\frac{3}{5}} < 0$ et $f(-2) = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} > 0$ : solution unique $\alpha \in ]-3;-2[$.

**10** Voir la figure.

**11** Sur $]2;+\infty[$, $f$ prend chaque valeur réelle exactement une fois ; sur $]-\infty;0]$, $f$ prend chaque valeur de $]-\infty;3]$ exactement une fois. Donc : si $m \leq 3$, deux solutions ; si $m > 3$, une seule solution.

**12** a) $g$ est continue et strictement croissante sur $]2;+\infty[$ : $J = \mathbb{R}$.

b) $g(\beta) = 0$ donc $g^{-1}(0) = \beta$. De $g(\beta) = 0$ : $\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta-2}} = \beta + 3$, donc $\sqrt{\dfrac{\beta-2}{\beta}} = \dfrac{1}{\beta+3}$ et $g'(\beta) = 1 + \dfrac{1}{(\beta-2)^2(\beta+3)} \neq 0$. D'où $\left(g^{-1}\right)'(0) = \dfrac{1}{g'(\beta)} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{(\beta-2)^2(\beta+3)}}$.



## Exercice 13

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$, et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 1 cm).

**1** a) Montrer que l'ensemble de définition de $f$ est : $\mathcal{D}_f=]-\infty;0]\cup]1;+\infty[$.

b) Calculer les limites de $f$ aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

c) En déduire les équations des asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

**2** Étudier la dérivabilité de $f$ à gauche en $0$, et donner une interprétation du résultat obtenu.

**3** a) Prouver que : $f'(x)=\dfrac{-1}{2(x-1)^2\cdot\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}}$ pour tout $x$ de $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variations de $f$.

**4** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et ses asymptotes dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**5** Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $]-\infty;0]$.

a) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $I$ à préciser.

b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in I$.

c) Tracer $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

### ✔ Solution

**1** a) $x\in\mathcal{D}_f \iff x\neq 1$ et $\dfrac{x}{x-1}\geq 0 \iff x\leq 0$ ou $x>1$.

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$ ; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ ; $f(0)=0$.

c) Asymptotes : $y=1$ (en $\pm\infty$) et $x=1$.

**2** Pour $x<0$ : $f(x)=\dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{1-x}}$ et $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{-1}{\sqrt{-x}\sqrt{1-x}}\xrightarrow[x\to 0^-]{}-\infty$ : demi-tangente verticale en $O$.

**3** a) Avec $u(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $u'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$ et $f'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}=\dfrac{-1}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x}{x-1}}}$.

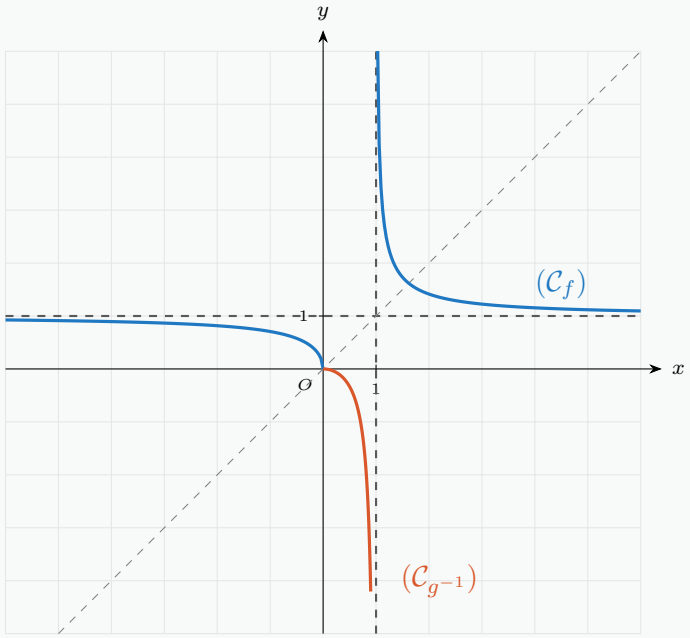
b) $f'<0$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ |

**4** Voir la figure.

**5** a) $g$ est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ : $I=[0;1[$.

b) $x\in[0;1[$, $y\leq 0$ : $\dfrac{y}{y-1}=x^2 \iff y(1-x^2)=-x^2 \iff y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.




## Exercice 14

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\sin x + \cos(2x)$, et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

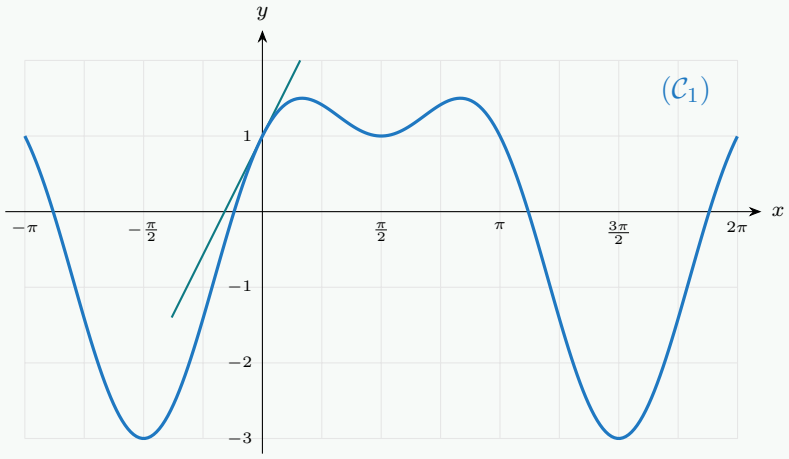
1. Calculer $f(x+2\pi)$ ; conclure.
2. Calculer $f(\pi - x)$ ; conclure.
3. Justifier qu'il suffit d'étudier $f$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, et dresser le tableau de variations de $f$ sur cet intervalle.
4. Donner une équation de la tangente $(T)$ à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $0$.
5. Tracer $(\mathcal{C}_1)$, la courbe de la restriction de $f$ à l'intervalle $[-\pi;2\pi]$.

### ✔ Solution

1. $f(x+2\pi) = 2\sin x + \cos(2x+4\pi) = f(x)$ : $f$ est périodique de période $2\pi$.
2. $f(\pi - x) = 2\sin x + \cos(2\pi - 2x) = 2\sin x + \cos(2x) = f(x)$ : la droite $x = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
3. On étudie $f$ sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, on complète par la symétrie d'axe $x = \frac{\pi}{2}$ sur $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ (intervalle de longueur $2\pi$ au total), puis par périodicité.
   $f'(x) = 2\cos x - 2\sin(2x) = 2\cos x\,(1 - 2\sin x)$. Sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x > 0$ et $1 - 2\sin x > 0 \iff x < \frac{\pi}{6}$.

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{\pi}{6}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $f(x)$ | $-3$ | ↗ | $\frac{3}{2}$ | ↘ | $1$ |

4. $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$ : $(T) : y = 2x + 1$.
5. Figure :



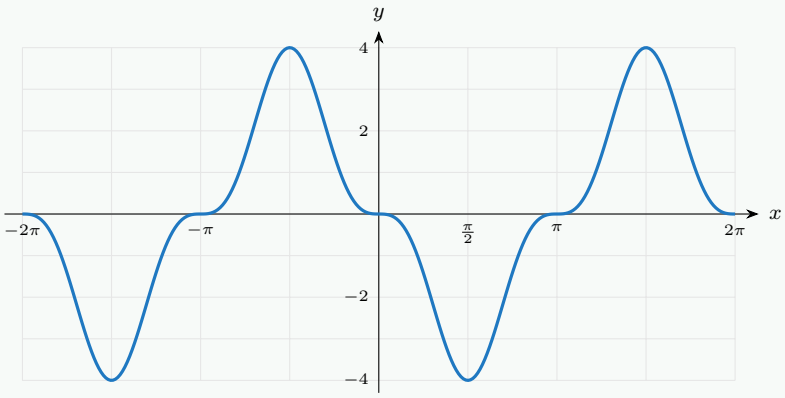

## Exercice 15

$f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(3x) - 3\sin x$.

1. Comparer $f(x+2\pi)$, $f(-x)$ et $f(\pi - x)$ à $f(x)$. Démontrer alors qu'il suffit d'étudier $f$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Démontrer que pour tout réel $x$ : $f'(x) = -6\sin x \sin(2x)$.
3. Étudier les variations de $f$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Tracer la courbe de $f$ sur $[-2\pi; 2\pi]$.

### ✔ Solution

1. $f(x+2\pi) = f(x)$ ($2\pi$-périodique) ; $f(-x) = -f(x)$ ($f$ impaire : $(\mathcal{C}_f)$ symétrique par rapport à $O$) ; $f(\pi - x) = \sin(3\pi - 3x) - 3\sin(\pi - x) = \sin(3x) - 3\sin x = f(x)$ (axe de symétrie $x = \frac{\pi}{2}$). L'étude sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donne, par imparité, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, puis par la symétrie d'axe $x = \frac{\pi}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (longueur $2\pi$), puis tout $\mathbb{R}$ par périodicité.
2. $f'(x) = 3\cos(3x) - 3\cos x = 3\big(\cos(3x) - \cos x\big) = 3 \times \big(-2\sin(2x)\sin x\big) = -6\sin x \sin(2x)$ (formule $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$).
3. Sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ : $\sin x \geq 0$ et $\sin(2x) \geq 0$, donc $f'(x) \leq 0$ : $f$ est décroissante, de $f(0) = 0$ à $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 3 = -4$.
   (Remarque : $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$, donc $f(x) = -4\sin^3 x$.)
4. Figure :




## Exercice 16

Soit la fonction $f$ définie par : $f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$.

1. Montrer que la droite $(D) : x = -\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe de $f$.

**2** Montrer que le point $E\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe de $f$.

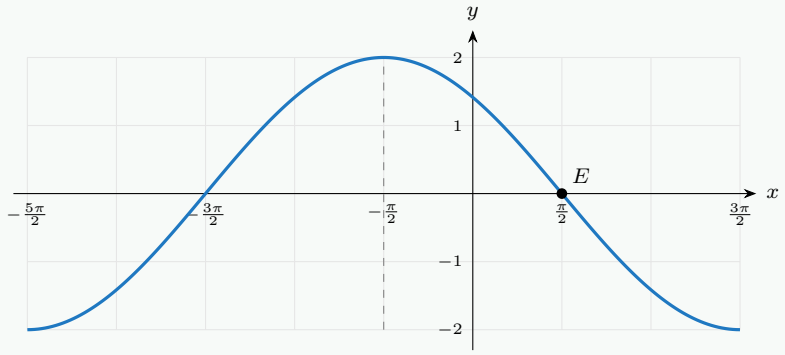
**3** Étudier les variations de $f$ sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et construire $(\mathcal{C}_f)$.

✔ Solution

**1** $f(-\pi-x)=2\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(-\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$ : axe $x=-\frac{\pi}{2}$.

**2** $f(\pi-x)=2\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=2\cos\left(\pi-\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=-f(x)$, donc $f(\pi-x)+f(x)=0$ : $E\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ est centre de symétrie.

**3** $f'(x)=-\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. Pour $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ : $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, donc $f'(x)\leq 0$ : $f$ décroît de $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2$ à $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Avec l'axe et le centre de symétrie, on obtient la courbe sur une période $(4\pi)$ :




## Exercice 17

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sin^2 x-2\cos x-1$, et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**1** a) Montrer que $f$ est une fonction paire.

b) Montrer que $2\pi$ est une période de $f$.

c) Démontrer alors qu'il suffit d'étudier $f$ sur l'intervalle $I=[0;\pi]$.

**2** a) Démontrer que pour tout réel $x\in I$ : $f'(x)=2\sin x(\cos x+1)$.

b) Dresser le tableau de variations de $f$ sur $I$.

**3** a) Démontrer que pour tout réel $x\in I$ : $f''(x)=4(\cos x+1)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)$.

b) Étudier la convexité de $(\mathcal{C})$ sur $I$.

**4** Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses sur $I$.

**5** Tracer $(\mathcal{C})$ sur l'intervalle $I$, puis sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$.

✔ Solution

**1** a) $f(-x)=\sin^2 x-2\cos x-1=f(x)$ : $f$ est paire.

b) sin et cos sont $2\pi$-périodiques, donc $f(x+2\pi)=f(x)$.

c) On étudie sur $[0;\pi]$, on complète par parité sur $[-\pi;\pi]$ (longueur $2\pi$), puis par périodicité.

**2** a) $f'(x)=2\sin x\cos x+2\sin x=2\sin x(\cos x+1)$.

b) Sur $[0;\pi]$ : $\sin x\geq 0$ et $\cos x+1\geq 0$, donc $f'\geq 0$ : $f$ croît de $f(0)=-3$ à $f(\pi)=1$.

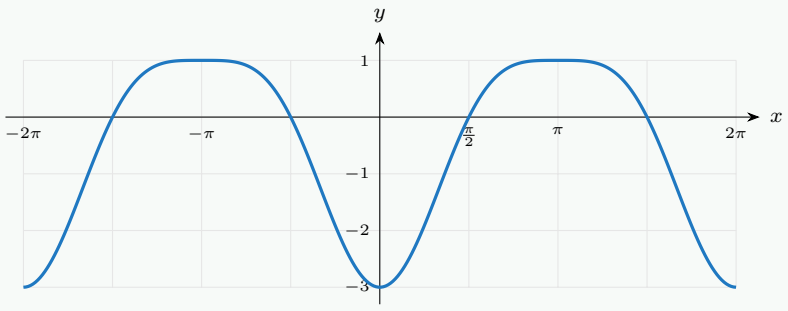
**3** a) $f'(x)=\sin(2x)+2\sin x$, donc $f''(x)=2\cos(2x)+2\cos x=4\cos^2 x+2\cos x-2=4\left(\cos^2 x+\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\right)=4(\cos x+1)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)$.

b) Sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ : $\cos x\geq\frac{1}{2}$, $f''\geq 0$, $(\mathcal{C})$ convexe ; sur $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$ : $(\mathcal{C})$ concave. Point d'inflexion $\left(\frac{\pi}{3};-\frac{5}{4}\right)$

(car $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} - 1 - 1 = -\frac{5}{4}$).

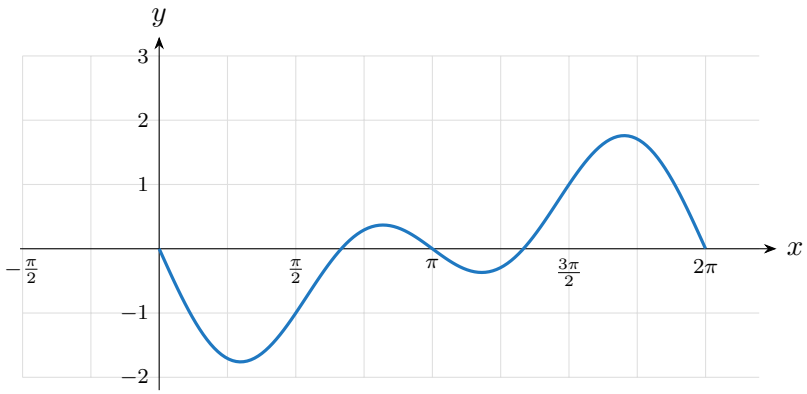
**4** $f(x) = 1 - \cos^2 x - 2\cos x - 1 = -\cos x(\cos x + 2)$ ; $\cos x + 2 > 0$, donc $f(x) = 0 \iff \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}$ sur $I$ : point $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

**5** Figure :




## Exercice 18

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ par : $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x) + 1$. La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction dérivée $f'$ sur $[0; 2\pi]$.




**1** a) Déterminer la fonction dérivée $f'$ de la fonction $f$.

b) En utilisant la relation $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$, montrer que, pour tout réel $x$ de $[0; 2\pi]$ : $f'(x) = -\sin x\,(1 + 2\cos x)$.

**2** Résoudre dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ l'équation : $\sin x\,(1 + 2\cos x) = 0$.

**3** a) En s'appuyant sur la représentation graphique de $f'$, dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[0; 2\pi]$.

b) Déduire des questions 2. et 3.a) le tableau de variations de $f$ sur $[0; 2\pi]$. Préciser les ordonnées des points dont l'abscisse $x$ vérifie $f'(x) = 0$.

**4** Tracer la courbe représentative de $f$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ dans le repère précédent.

### ✔ Solution

**1** a) $f'(x) = -\sin x - \sin(2x)$.

b) $f'(x) = -\sin x - 2\sin x \cos x = -\sin x\,(1 + 2\cos x)$.

**2** $\sin x = 0 \iff x \in \{0; \pi; 2\pi\}$ ; $1 + 2\cos x = 0 \iff \cos x = -\frac{1}{2} \iff x \in \left\{\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$.

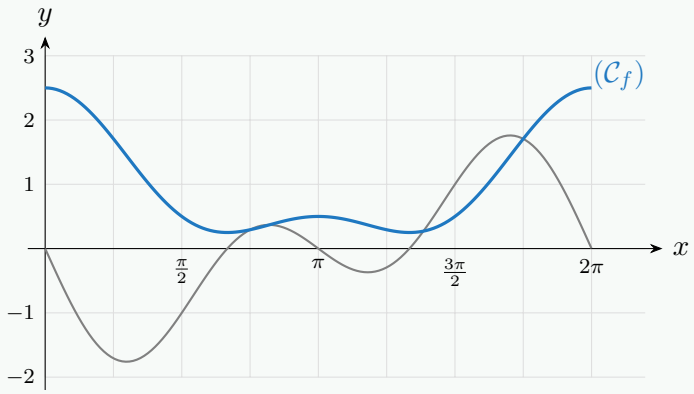
$S = \left\{0; \frac{2\pi}{3}; \pi; \frac{4\pi}{3}; 2\pi\right\}$.

**3** a) et b)

| $x$ | $0$ | | $\frac{2\pi}{3}$ | | $\pi$ | | $\frac{4\pi}{3}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $f(x)$ | $\frac{5}{2}$ | $\searrow$ | $\frac{1}{4}$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | $\frac{1}{4}$ | $\nearrow$ | $\frac{5}{2}$ |

$f(0)=1+\frac{1}{2}+1=\frac{5}{2}$ ; $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)+1=\frac{1}{4}$ ; $f(\pi)=-1+\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$ ; $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}$ ; $f(2\pi)=\frac{5}{2}$.

**4** Courbe de $f$ (en bleu foncé) avec celle de $f'$ (en gris) :




## Exercice 19

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]-\pi;\pi[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\cos x-\sin x}{\sin x} \ ; \ x\neq 0 \\ f(0)=-1 \end{cases}$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**1** Montrer que $f$ est continue et dérivable en $0$.

**2** Montrer que $f$ est dérivable sur $]-\pi;\pi[$ et que $f'(x)=\dfrac{1}{1+\cos x}$.

**3** Dresser le tableau de variations de $f$ sur $]-\pi;\pi[$.

**4** Montrer que $\Omega(0;-1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$, puis écrire une équation de la tangente $(T)$ à $(\mathcal{C})$ en $\Omega$.

**5** Tracer $(T)$ et $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

✔ Solution

Pour $x\in]-\pi;\pi[\setminus\{0\}$ : $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\tan\dfrac{x}{2}$, donc $f(x)=\tan\dfrac{x}{2}-1$ ; cette égalité est aussi vraie en $0$ ($\tan 0-1=-1$).

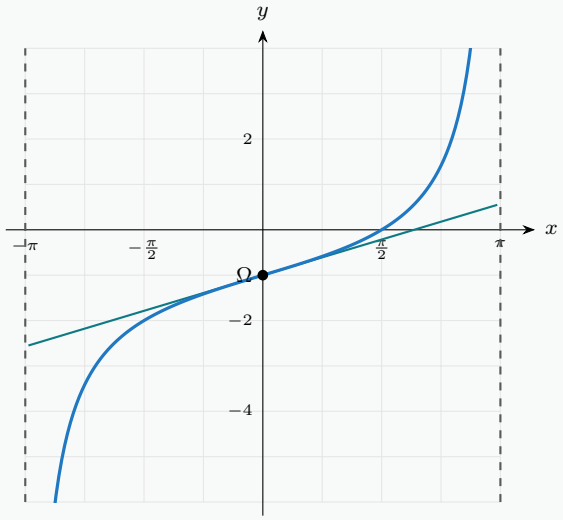
**1** $f(x)=\tan\frac{x}{2}-1$ sur $]-\pi;\pi[$ ($\frac{x}{2}\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$) : $f$ est continue et dérivable en $0$, avec $f'(0)=\frac{1}{2}$.

**2** $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{1+\cos x}$ (car $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$).

**3** $f'>0$ ; $\lim\limits_{x\to-\pi^+}\tan\dfrac{x}{2}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pi^-}\tan\dfrac{x}{2}=+\infty$ : $f$ est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ ; asymptotes $x=-\pi$ et $x=\pi$.

**4** $f(-x)+f(x)=-\tan\frac{x}{2}-1+\tan\frac{x}{2}-1=-2=2\times(-1)$ : $\Omega(0;-1)$ est centre de symétrie.
$f'(0)=\frac{1}{2}$ : $(T):y=\dfrac{1}{2}x-1$.

**5** Figure :




## Exercices complémentaires

### Exercice 20

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x^2+1}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**1** a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique $(\Delta)$ à déterminer au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

**2** a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Écrire une équation de la tangente $(T)$ à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $-1$.

**3** Donner les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère.

**4** Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet deux points d'inflexion à déterminer.

**5** Construire $(\Delta)$, $(T)$ et $(\mathcal{C}_f)$ (on prend $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\,\text{cm}$, $\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0{,}6$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \simeq 1{,}8$ et $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \simeq 0{,}7$).

**6** Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$.

**7** a) Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.

b) Montrer que $f^{-1}$ est dérivable en $0$ puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

c) Tracer $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans le même repère.

✔ **Solution**

**1** a) $\dfrac{1}{x^2+1} \to 0$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b) $f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{x^2+1} \to 0$ : $(\Delta) : y = x + \dfrac{1}{2}$ (et $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\Delta)$).

**2** a) $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(x^2+1)^2 - 2x}{(x^2+1)^2}$.

b) Si $x \leq 0$ : $(x^2+1)^2 - 2x > 0$. Si $x > 0$ : $x^2+1 \geq 2x$ et $x^2+1 > 1$, donc $(x^2+1)^2 \geq 2x(x^2+1) > 2x$. Ainsi $f'(x) > 0$ : $f$ est strictement croissante.

c) $f(-1) = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ et $f'(-1) = 1 + \frac{2}{4} = \frac{3}{2}$ : $(T) : y = \dfrac{3}{2}(x+1)$.

**3** $f(0) = \frac{3}{2}$ : point $\left(0;\frac{3}{2}\right)$. $f$ strictement croissante et $f(-1) = 0$ : point $(-1;0)$ (unique).

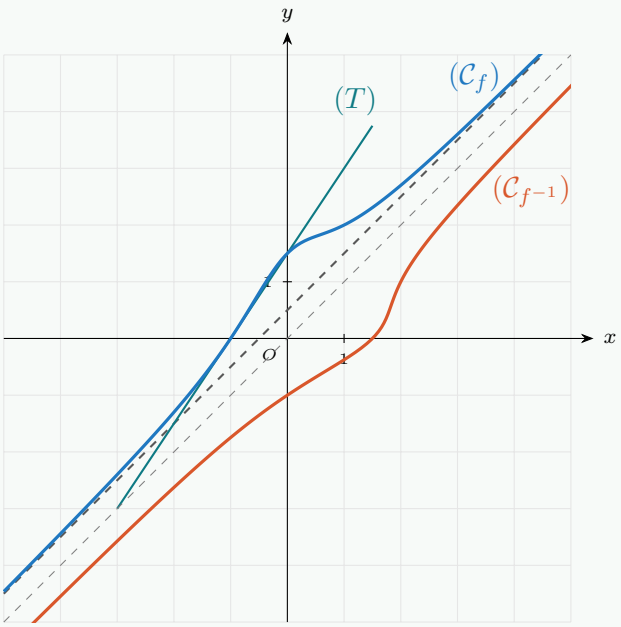
**4** $f''(x) = -\dfrac{2(x^2+1)^2 - 2x \times 2(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4} = \dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$ s'annule en changeant de signe en $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ : points d'inflexion $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{5}{4}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{5}{4}\right)$.

**5** Voir la figure.

**6** $f(x) > 0 \iff x > -1 : S = ]-1; +\infty[$.

**7** a) $f$ continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ : $J = \mathbb{R}$.

b) $f(-1) = 0$ et $f'(-1) = \frac{3}{2} \neq 0 : \left(f^{-1}\right)'(0) = \dfrac{2}{3}$.




## Exercice 21

**I.** On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

**1** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

**2** a) Montrer, pour tout réel $x$, que $g'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

b) Donner le tableau des variations de $g$, puis en déduire que $g(x) > 0$ pour tout réel $x$.

**II.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+1}$, et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé.

**1** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Interpréter géométriquement.

**2** Montrer que la droite $(D) : y = 2x - 1$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

**3** Montrer que, pour tout réel $x$, $f'(x) = g(x)$, et dresser le tableau des variations de $f$.

**4** Calculer $f(1)$, puis tracer $(\mathcal{C}_f)$.

**5** a) Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.

b) Montrer que $f^{-1}$ est dérivable en $\sqrt{2}$ puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(\sqrt{2})$.

c) Tracer $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans le même repère.

✔ Solution

**I.**

**1** Pour $x \neq 0$ : $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1+1 = 2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1-1 = 0$.

**2** a) $g'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

b) $g' > 0$ : $g$ croît strictement de $0$ (en $-\infty$) à $2$ (en $+\infty$) ; donc $g(x) > 0$ pour tout $x$.

**II.**

**1** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Pour $x < 0$ : $x + \sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} \to 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ : asymptote horizontale $y = -1$ en $-\infty$.

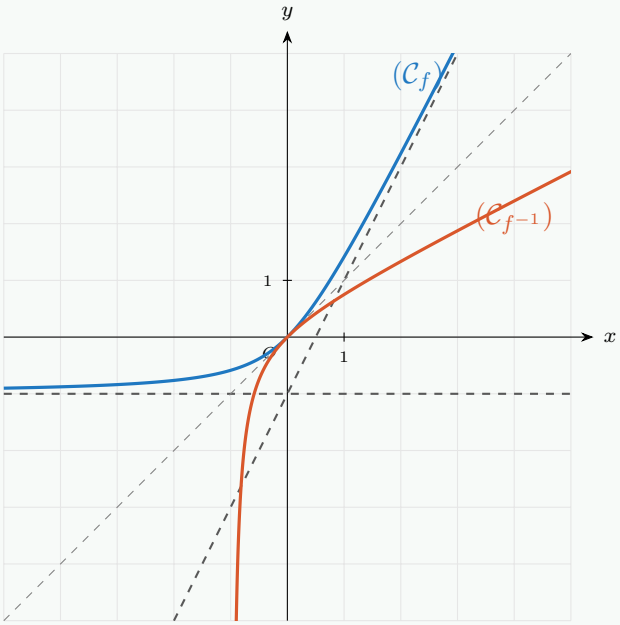
**2** $f(x) - (2x-1) = \sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

**3** $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = g(x) > 0$ : $f$ croît strictement de $-1$ à $+\infty$.

**4** $f(1) = \sqrt{2}$. Figure ci-dessous.

**5** a) $f$ continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ : $J = ]-1;+\infty[$.

b) $f(1) = \sqrt{2}$ et $f'(1) = g(1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$ : $\left(f^{-1}\right)'(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = 2-\sqrt{2}$.




## Exercice 22

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = 1 - \sqrt{x^2+2x}$, et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**1** Donner $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de $f$.

**2** a) Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

b) En déduire $D_E$, le domaine d'étude de $f$.

**3** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

**4** Étudier la dérivabilité de $f$ à droite en $0$. Interpréter graphiquement le résultat.

**5** Montrer que la droite d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

**6** a) Étudier les variations de $f$ sur $D_E$.

b) Dresser le tableau de variations de $f$ sur $\mathcal{D}_f$.

**7** a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[0; +\infty[$.

b) Vérifier que $0 < \alpha < 1$.

**8** Construire $(\mathcal{C}_f)$.

**9** Soit $g$ la restriction de $f$ à $[0; +\infty[$.

a) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.

b) Calculer $g(1)$.

c) Montrer que $g^{-1}$ est dérivable en $1 - \sqrt{3}$ puis calculer $\left(g^{-1}\right)'(1 - \sqrt{3})$.

d) Tracer $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

✔ Solution

**1** $x^2 + 2x = x(x+2) \geq 0 \iff x \leq -2$ ou $x \geq 0$ : $\mathcal{D}_f = ]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$.

**2** a) $x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow -2 - x \in \mathcal{D}_f$ et $(-2-x)^2 + 2(-2-x) = x^2 + 2x$ : $f(-2-x) = f(x)$.

b) $D_E = \mathcal{D}_f \cap [-1; +\infty[ = [0; +\infty[$.

**3** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

**4** $\dfrac{f(x) - 1}{x} = -\dfrac{\sqrt{x}\sqrt{x+2}}{x} = -\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$ : demi-tangente verticale au point $(0; 1)$.

**5** $f(x) + x = 1 - \dfrac{(x^2 + 2x) - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 - 1 = 0$.

**6** a) Sur $[0; +\infty[$, $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x}$ est strictement croissante : $f$ est strictement décroissante.

b) Par symétrie, $f$ est strictement croissante sur $]-\infty; -2]$ ; $f(-2) = f(0) = 1$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**7** a) $f$ est continue et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, de $1$ à $-\infty$ : unique solution $\alpha$.

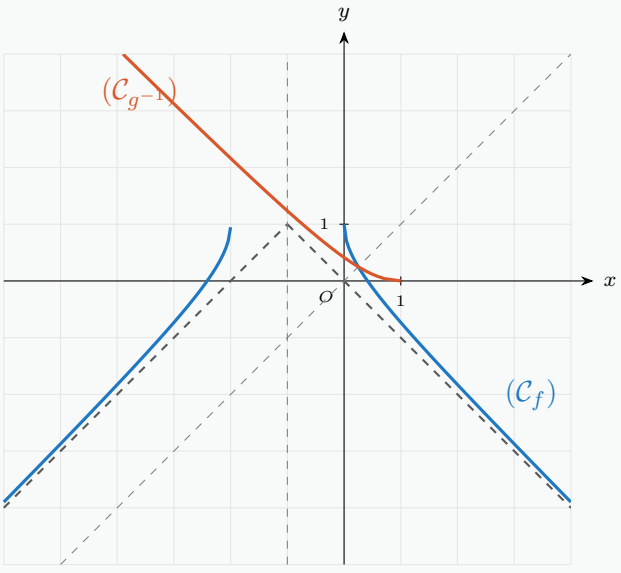
b) $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = 1 - \sqrt{3} < 0$ : $0 < \alpha < 1$. (En fait $x^2 + 2x = 1$ donne $\alpha = \sqrt{2} - 1$.)

**8** Voir la figure (asymptote $y = x + 2$ en $-\infty$ par symétrie).

**9** a) $g$ continue et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ : $J = ]-\infty; 1]$.

b) $g(1) = 1 - \sqrt{3}$.

c) $g'(x) = -\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$, $g'(1) = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} \neq 0$ : $\left(g^{-1}\right)'(1 - \sqrt{3}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



## Exercice 23

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**1** a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.

**2** Montrer que le point $\Omega(1;-1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

**3** a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

**4** Montrer que le point $\Omega$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$.

**5** a) Écrire une équation de la tangente $(T)$ à $(\mathcal{C}_f)$ au point $\Omega$.

b) Calculer $f(3)$, puis tracer $(\mathcal{C}_f)$.

**6** Soit $g$ la restriction de $f$ à $[2;+\infty[$.

a) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.

b) Montrer que $g^{-1}$ est dérivable en $1$ puis calculer $\left(g^{-1}\right)'(1)$.

c) Tracer $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

### ✔ Solution

**1** a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b) $\dfrac{f(x)}{x} = x^2 - 3x + \dfrac{1}{x} \to +\infty$ en $\pm\infty$ : branches paraboliques de direction $(Oy)$.

**2** $f(2-x) = (2-x)^3 - 3(2-x)^2 + 1 = -x^3 + 3x^2 - 3$, donc $f(2-x) + f(x) = -2 = 2\times(-1)$ : $\Omega(1;-1)$ est centre de symétrie.

**3** a) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ : positif hors de $[0;2]$, négatif sur $]0;2[$.

b) $f(0) = 1$, $f(2) = -3$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

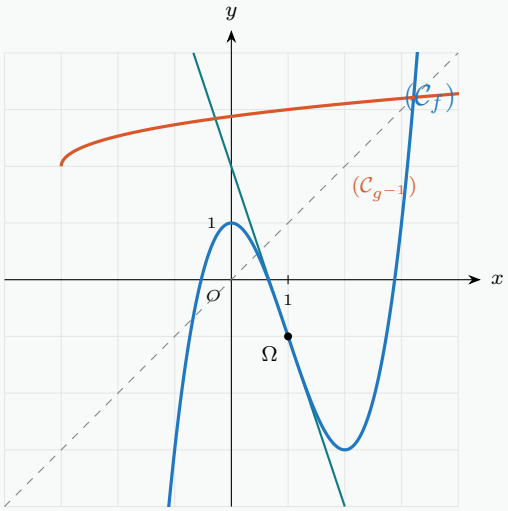
**4** $f''(x) = 6x - 6$ s'annule en $1$ en changeant de signe, et $f(1) = -1$ : $\Omega$ est un point d'inflexion.

**5** a) $f'(1) = -3$ : $(T) : y = -3(x-1) - 1 = -3x + 2$.

b) $f(3) = 27 - 27 + 1 = 1$. Figure.

**6** a) $g$ continue et strictement croissante sur $[2;+\infty[$ : $J = [-3;+\infty[$.

b) $g(3) = 1$ et $g'(3) = 9 \neq 0$ : $\left(g^{-1}\right)'(1) = \dfrac{1}{9}$.




## Exercice 24

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = x - \sqrt{2x-1}$, et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Donner $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de $f$.
2. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Déterminer la nature de la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
3. Étudier la dérivabilité de $f$ à droite en $\frac{1}{2}$. Interpréter graphiquement le résultat.
4. a) Montrer que $f$ est dérivable sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.
   b) Montrer que le signe de $f'(x)$ sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ est le signe de $x-1$.
   c) Dresser le tableau de variations de $f$ sur $\mathcal{D}_f$.
   d) Écrire une équation de la tangente $(T)$ à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $5$.
5. Construire $(\mathcal{C}_f)$.
6. Soit $g$ la restriction de $f$ à $[1;+\infty[$.
   a) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.
   b) Montrer que $g^{-1}$ est dérivable en $2$ puis calculer $\left(g^{-1}\right)'(2)$.
   c) Tracer $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.
7. a) Vérifier, pour tout $x\in[1;+\infty[$, que $g(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2$.
   b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

### ✔ Solution

1. $\mathcal{D}_f = \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.
2. a) $f(x) = x\left(1-\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}\right) \to +\infty$.
   b) $\dfrac{f(x)}{x} \to 1$ et $f(x)-x = -\sqrt{2x-1} \to -\infty$ : branche parabolique de direction $y=x$.
3. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ; $\dfrac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{\sqrt{2x-1}}{\frac{1}{2}(2x-1)} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{2x-1}} \to -\infty$ : demi-tangente verticale au point $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.
4. a) $x\mapsto 2x-1$ est dérivable et strictement positive sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, donc $\sqrt{2x-1}$ et $f$ sont dérivables.
   b) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} = \dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{2x-1}} = \dfrac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}$ : signe de $x-1$.

c) $f(1)=0$ :

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

d) $f(5)=5-3=2$, $f'(5)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ : $(T): y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$.

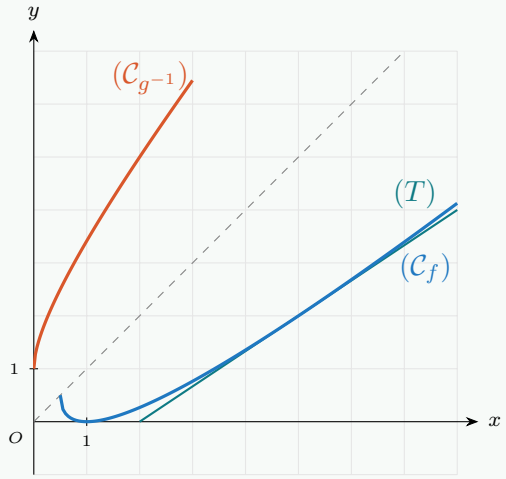
**5** Voir la figure.

**6** a) $g$ continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ : $J=[0;+\infty[$.

b) $g(5)=2$ et $g'(5)=\frac{2}{3}\neq 0$ : $\left(g^{-1}\right)'(2)=\frac{3}{2}$.

**7** a) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2=\frac{1}{2}\left(2x-1-2\sqrt{2x-1}+1\right)=x-\sqrt{2x-1}=g(x)$.

b) $x\geq 0$, $y\geq 1$ : $\left(\sqrt{2y-1}-1\right)^2=2x \iff \sqrt{2y-1}=1+\sqrt{2x}$ (car $\sqrt{2y-1}\geq 1$) $\iff y=\dfrac{\left(1+\sqrt{2x}\right)^2+1}{2}=1+x+\sqrt{2x}$.




## Exercice 25

Soient $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin(2x)$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\|=\frac{\pi}{4}$ et $\|\vec{j}\|=1$.

**1** Montrer que $f$ est périodique de période $\pi$.

**2** Étudier la parité de $f$.

**3** Vérifier que la droite $(\Delta): x=\frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

**4** Expliquer pourquoi il suffit d'étudier la fonction $f$ sur l'intervalle $I=\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

**5** a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in I$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de $f$ sur $I$.

**6** Construire $(\mathcal{C}_f)$ sur $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$.

✔ Solution

**1** $f(x+\pi)=\sin(2x+2\pi)=f(x)$.

**2** $f(-x)=-f(x)$ : $f$ est impaire.

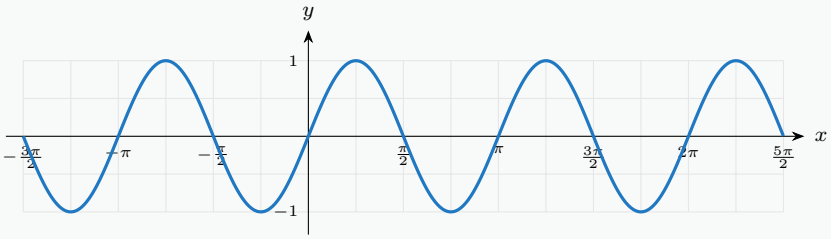
**3** $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(\pi-2x)=\sin(2x)=f(x)$ : axe $x=\frac{\pi}{4}$.

**4** L'étude sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ donne $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ par imparité, puis $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ (longueur $\pi$) par la symétrie d'axe $x=\frac{\pi}{4}$, puis $\mathbb{R}$ par périodicité.

**5** a) $f'(x) = 2\cos(2x)$.

b) Sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $2x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ : $f'(x) \geq 0$ ; $f$ croît de $f(0) = 0$ à $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

**6** Figure :




## Exercice 26

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3}{x+1} \ ; \ x \leq 0 \\ -\dfrac{\sqrt{x+1}}{x} \ ; \ x > 0 \end{cases}$

**1** a) Déterminer $\mathcal{D}_f$ puis calculer les limites de $f$ aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

b) Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.

**2** $f$ est-elle continue en $0$ ?

**3** Étudier la dérivabilité de $f$ en $0$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

**4** a) Calculer $f'(x)$ sur les intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

**5** Construire $(\mathcal{C}_f)$.

### ✔ Solution

**1** a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ($x+1 \neq 0$ pour $x \leq 0$ ; $x+1 > 0$ et $x \neq 0$ pour $x > 0$).

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ($f(x) \sim x$) ;
- $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = +\infty$ (numérateur $\to 4$) ;
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ (numérateur $\to -1$, $x \to 0^+$) ;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -\sqrt{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = 0$.

b) $\dfrac{x^2+3}{x+1} = x - 1 + \dfrac{4}{x+1}$ : $y = x - 1$ est asymptote oblique en $-\infty$. $x = -1$ est asymptote verticale ; $x = 0$ est asymptote verticale (à droite) ; $y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

**2** $f(0) = 3$ mais $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ : $f$ n'est pas continue en $0$ (elle est seulement continue à gauche).

**3** $f$ n'est pas continue en $0$, donc pas dérivable en $0$. À gauche : $f'_g(0) = -3$ (calcul ci-dessous) : $(\mathcal{C}_f)$ admet au point $(0;3)$ une demi-tangente à gauche de pente $-3$ ; à droite, $(\mathcal{C}_f)$ s'éloigne vers $-\infty$ le long de l'axe $(Oy)$.

**4** a) Sur $]-\infty; 0[\setminus\{-1\}$ : $f'(x) = \dfrac{2x(x+1) - (x^2+3)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$ ; la limite en $0^-$ donne $f'_g(0) = -3$.

Sur $]0; +\infty[$ : $f'(x) = -\dfrac{\frac{x}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}}{x^2} = -\dfrac{x - 2(x+1)}{2x^2\sqrt{x+1}} = \dfrac{x+2}{2x^2\sqrt{x+1}}$.

b) Pour $x < 0$ : $x - 1 < 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $-(x+3)$. Pour $x > 0$ : $f'(x) > 0$. $f(-3) = \frac{12}{-2} = -6$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $-1$ | | $0$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | | $-$ | | | | $+$ | | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-6$ | $\searrow$ | $-\infty$ | | $+\infty$ | $\searrow$ | $3$ | | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ |

**5** Figure :

