CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 8

# Fonctions exponentielles

2BAC PC & SVT

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

## Exercice 1

Simplifier : $A = e^{\ln 9}$ ; $B = e^{4\ln 2}$ ; $C = e^{-\ln 3}$ ; $D = e^{\frac{1}{2}\ln 9}$ ; $E = e^{\ln 5+\ln 3}$ ; $F = e^{\ln 5} + e^{\ln 3}$ ; $G = e^{\ln 5-\ln 3}$ ; $H = e^{\ln 5} - e^{\ln 3}$.

**Solution**

$A = 9$ ; $B = e^{\ln 16} = 16$ ; $C = \frac{1}{3}$ ; $D = e^{\ln 3} = 3$ ; $E = e^{\ln 15} = 15$ ; $F = 5 + 3 = 8$ ; $G = \frac{5}{3}$ ; $H = 5 - 3 = 2$.

## Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $e^{2x} = 4$ ; $e^{7x+1} = -2$ ; $e^{3x-10} = e^2$ ; $e^{x+6} - e^{4x+2} = 0$ ; $e^{3x^2+2x-5} = 1$ ; $e^{x^2-5} = \dfrac{1}{e}$ ; $\dfrac{e^{2x}}{e^{x+1}} = e^{3x+2}$ ; $\dfrac{1}{e} = \dfrac{e^{4x+1}}{e^{x+3}}$ ; $\dfrac{e^{-x}-2}{e^x+1} = -2$ ; $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$ ; $e^{3x} + e^{2x} = 2e^x$.

**Solution**

- $2x = \ln 4 \iff x = \ln 2$ ; $e^{7x+1} > 0 : S = \varnothing$ ; $3x - 10 = 2 \iff x = 4$ ; $x + 6 = 4x + 2 \iff x = \frac{4}{3}$.
- $3x^2 + 2x - 5 = 0 \iff (x-1)(3x+5) = 0 : S = \left\{-\frac{5}{3}; 1\right\}$ ; $x^2 - 5 = -1 : S = \{-2; 2\}$.
- $e^{x-1} = e^{3x+2} \iff x = -\frac{3}{2}$ ; $e^{-1} = e^{3x-2} \iff x = \frac{1}{3}$.
- $e^{-x} - 2 = -2e^x - 2 \iff e^{-x} = -2e^x$, impossible (un membre positif, l'autre négatif) : $S = \varnothing$.
- Avec $t = e^x > 0 : t^2 - 5t + 6 = 0 \iff t \in \{2; 3\} : S = \{\ln 2; \ln 3\}$.
- En divisant par $e^x > 0 : t^2 + t - 2 = 0 \iff t = 1$ ou $t = -2$ (rejeté) : $S = \{0\}$.

## Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $e^{2x+1} < e^{3-x}$ ; $e^{-3x+5} \geq e^{x-1}$ ; $e^{x+3} \leq 1$ ; $e^{1-3x} \leq 2$ ; $e^{x^2+4} < e^{x+4}$ ; $e^{x^2+1} \geq e^{2x}$ ; $e^{1-4x} - e^{2+x} \leq 0$ ; $e^{x^2+5x-2} - e^4 > 0$.

**Solution**

exp est strictement croissante :

- $2x + 1 < 3 - x \iff x < \frac{2}{3} : ]-\infty; \frac{2}{3}[$ ; $-3x + 5 \geq x - 1 \iff x \leq \frac{3}{2} : ]-\infty; \frac{3}{2}]$.
- $x + 3 \leq 0 : ]-\infty; -3]$ ; $1 - 3x \leq \ln 2 \iff x \geq \frac{1-\ln 2}{3} : [\frac{1-\ln 2}{3}; +\infty[$.
- $x^2 < x : ]0; 1[$ ; $x^2 + 1 \geq 2x \iff (x-1)^2 \geq 0 : S = \mathbb{R}$.
- $1 - 4x \leq 2 + x \iff x \geq -\frac{1}{5}$ ; $x^2 + 5x - 6 > 0 \iff (x+6)(x-1) > 0 : ]-\infty; -6[ \cup ]1; +\infty[$.

## Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{5x-2}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x^2}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{5-3x}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^3-x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x+1}-2}{x}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x-4}{e^x+3}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+2}{e^{2x}+e^x-1}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+2}{e^{2x}+e^x-1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}-3e^x-3$ $\lim\limits_{x\to+\infty} 3e^x-4x+8$ $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-5x-7)e^x$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{6x}$ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x-1}-1}{1-x}$ $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{e^{x+2}-e^3}{e^x-e}$ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{2x}+3e^x-4}{e^x-1}$

✔ Solution

**1** $+\infty$ ; 2) $0$ $(1-x^2\to-\infty)$ ; 3) $+\infty$ ; 4) $0$ $(x^3-x\to-\infty)$.

5) $\dfrac{e^{x+1}-2}{x}\to\dfrac{-2}{-\infty}=0$ ; 6) $\dfrac{0-4}{0+3}=-\dfrac{4}{3}$ ; 7) $\dfrac{0+2}{0+0-1}=-2$.

8) $\dfrac{e^x+2}{e^{2x}+e^x-1}=\dfrac{e^{-x}+2e^{-2x}}{1+e^{-x}-e^{-2x}}\to0$ ; 9) $-3$.

10) $3e^x-4x+8=x\left(3\dfrac{e^x}{x}-4+\dfrac{8}{x}\right)\to+\infty$ ; 11) $x^2e^x\to0$ et $xe^x\to0$ : la limite vaut $0$.

12) $t=\frac{1}{x}\to0^-$ : $x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\dfrac{e^t-1}{t}\to1$ ; 13) $\dfrac{1}{6}\times\dfrac{e^x-1}{x}\to\dfrac{1}{6}$.

14) Fonction continue en $0$ : $\dfrac{e^{-1}-1}{1}=\dfrac{1}{e}-1$. *(Si la limite était en $1$ : avec $t=x-1$, $\frac{e^t-1}{-t}\to-1$.)*

15) $\dfrac{e^{x+2}-e^3}{e^x-e}=\dfrac{e^2(e^x-e)}{e^x-e}=e^2$ ; 16) $\dfrac{(e^x-1)(e^x+4)}{e^x-1}=e^x+4\to5$.

## Exercice 5

Déterminer la dérivée de $f$ : $2e^x-4x+3$ ; $(3x-1)e^x$ ; $\dfrac{e^x-x}{e^x-1}$ ; $\dfrac{3}{e^x-x}$ ; $e^{x^3-3x+7}$ ; $e^{3+\ln x}$ ; $3e^{2x}+e^{-x}$ ; $xe^{-x}$.

✔ Solution

- $(2e^x-4x+3)'=2e^x-4$ ; $\left((3x-1)e^x\right)'=(3x+2)e^x$.
- Sur $\mathbb{R}^*$ : $\left(\dfrac{e^x-x}{e^x-1}\right)'=\dfrac{(e^x-1)^2-(e^x-x)e^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{(x-2)e^x+1}{(e^x-1)^2}$.
- $\left(\dfrac{3}{e^x-x}\right)'=\dfrac{-3(e^x-1)}{(e^x-x)^2}$ $(e^x-x\geq1>0)$ ; $\left(e^{x^3-3x+7}\right)'=3(x^2-1)e^{x^3-3x+7}$.
- Sur $]0;+\infty[$, $e^{3+\ln x}=e^3x$, de dérivée $e^3$ ; $(3e^{2x}+e^{-x})'=6e^{2x}-e^{-x}$ ; $(xe^{-x})'=(1-x)e^{-x}$.

## Exercice 6

Primitives sur $\mathbb{R}$ de : $5e^x+x-1$ ; $3e^{3x}-2x$ ; $e^{3x-2}$ ; $2xe^{x^2}$ ; $(x-1)e^{x^2-2x}$ ; $e^x(e^x-1)^3$ ; $\dfrac{e^x}{e^x+2}$ ; $\dfrac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}$.

✔ Solution

$(C\in\mathbb{R})$ $5e^x+\frac{x^2}{2}-x+C$ ; $e^{3x}-x^2+C$ ; $\frac{1}{3}e^{3x-2}+C$ ; $e^{x^2}+C$ ; $\frac{1}{2}e^{x^2-2x}+C$ ; $\frac{1}{4}(e^x-1)^4+C$ ; $\ln(e^x+2)+C$ ;

pour la dernière, $u=e^{-x}+1$, $u'=-e^{-x}$ : $f=-\dfrac{u'}{u^2}$, d'où $F(x)=\dfrac{1}{e^{-x}+1}+C$.

## Exercice 7

On considère $h(x) = e^x - x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $h'(x)$.
2. Étudier le signe de $h'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $h(0)$ et dresser le tableau de variations de $h$ (sans les limites).
4. En déduire que $h(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

**Solution**

$h'(x) = e^x - 1$ : négatif sur $]-\infty;0[$, positif sur $]0;+\infty[$. $h(0) = 0$ : $h$ décroît puis croît, son minimum est $h(0) = 0$, donc $h(x) \geq 0$, c'est-à-dire $e^x \geq x + 1$.

## Exercice 8

On considère $h(x) = (x^2+1)e^{-x} - 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $h'(x) = -(x-1)^2 e^{-x}$.
2. Donner le signe de $h'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $h(0)$ puis dresser le tableau de variations de $h$.
4. Étudier le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

**Solution**

$h'(x) = 2xe^{-x} - (x^2+1)e^{-x} = -(x^2-2x+1)e^{-x} = -(x-1)^2e^{-x} \leq 0$ : $h$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ ($h'$ ne s'annule qu'en 1). $h(0) = 0$, donc $h(x) > 0$ pour $x < 0$ et $h(x) < 0$ pour $x > 0$.

## Exercice 9

$f(x) = e^x - x - 2$ sur $\mathbb{R}$, et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   b) Montrer que la droite $(\Delta) : y = -x - 2$ est asymptote de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.
2. a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

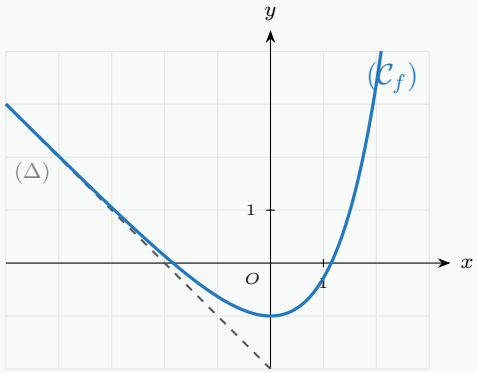
   b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ et en déduire la direction de la branche parabolique.
3. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de $f$.
4. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et $(\Delta)$.

**Solution**

1. a) $e^x \to 0$ et $-x-2 \to +\infty$ : $f(x) \to +\infty$. b) $f(x) - (-x-2) = e^x \to 0$ (et $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\Delta)$).
2. a) $f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{2}{x}\right) \to +\infty$. b) $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x} - 1 - \frac{2}{x} \to +\infty$ : branche parabolique de direction $(Oy)$.
3. $f'(x) = e^x - 1$ ; $f$ décroît sur $]-\infty;0]$ et croît sur $[0;+\infty[$ ; $f(0) = -1$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

4. Voir la figure.




## Exercice 10

$f(x) = x - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

**1** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

**2** Montrer que $(\Delta) : y = x + 1$ est asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

**3** a) Vérifier que $f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{e^x + 1}$. b) Montrer que $(D) : y = x - 1$ est asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

**4** Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de $f$.

**5** Tracer $(\Delta)$, $(D)$ et $(\mathcal{C}_f)$.

### ✔ Solution

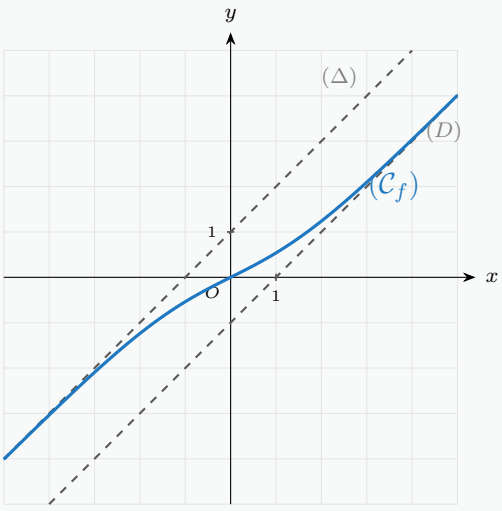
**1** $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \to -1$ en $-\infty$ et $\to 1$ en $+\infty$ : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

**2** $f(x) - (x + 1) = -\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} - 1 = \dfrac{-2e^x}{e^x + 1} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.

**3** a) $x - 1 + \dfrac{2}{e^x + 1} = x - \dfrac{(e^x + 1) - 2}{e^x + 1} = f(x)$. b) $f(x) - (x - 1) = \dfrac{2}{e^x + 1} \to 0$.

**4** $\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)' = \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$, donc $f'(x) = \dfrac{(e^x + 1)^2 - 2e^x}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2} > 0$ : $f$ est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ ; $f(0) = 0$.

**5** Voir la figure.



## Exercice 11 : Session Normale 2004

**I)** $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

**1** a) Vérifier que $\frac{1}{e^{-x}+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1}$. b) Montrer que $f$ est impaire.

**2** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

**3** a) Montrer que $f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$. b) Dresser le tableau de variations de $f$. c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^+ : 1 - \frac{2}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}x$.

**4** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)\right] = 0$ et interpréter.

**5** Représenter $(\mathcal{C}_f)$.

**II)** $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 - \frac{2}{e^{u_n}+1}$.

**1** Montrer que $u_n > 0$.

**2** a) Montrer que $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$. b) Montrer que $(u_n)$ est décroissante.

**3** Montrer que $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

✔ **Solution**

**I)**

**1** a) $\frac{1}{e^{-x}+1} = \frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{1}{e^x+1}$. b) $\mathbb{R}$ symétrique et $f(-x) = 1 + \frac{x}{2} - 2 + \frac{2}{e^x+1} = -f(x)$.

**2** $\frac{2}{e^x+1} \to 0 : f(x) \to -\infty$ (et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ par imparité).

**3** a) $f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{-(e^x+1)^2+4e^x}{2(e^x+1)^2} = -\frac{(e^x-1)^2}{2(e^x+1)^2}$. b) $f' \leq 0 : f$ décroît strictement de $+\infty$ à $-\infty$, avec $f(0) = 0$. c) Pour $x \geq 0 : f(x) \leq f(0) = 0$, soit $1 - \frac{2}{e^x+1} \leq \frac{x}{2}$.

**4** $f(x) - \left(1 - \frac{x}{2}\right) = -\frac{2}{e^x+1} \to 0$ : la droite $y = 1 - \frac{1}{2}x$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$ (et $y = -1 - \frac{1}{2}x$ en $-\infty$ par symétrie).

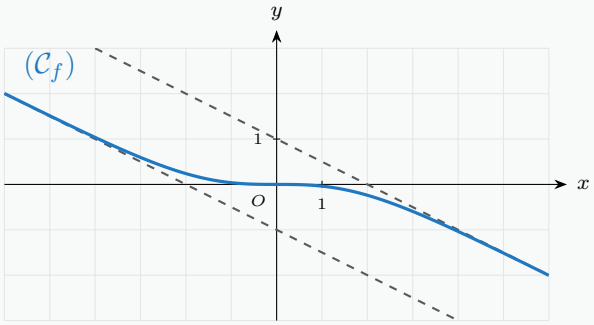
**5** Voir la figure.

**II)**

**1** $u_0 > 0$ ; si $u_n > 0$, $e^{u_n} > 1$ donc $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}-1}{e^{u_n}+1} > 0$.

**2** a) D'après I.3.c) avec $x = u_n \geq 0 : u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$. b) $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n < u_n$.

**3** $u_0 = 1$ ; si $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ alors $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Par encadrement $(0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n)$ : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.




## Exercice 12

$f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)e^x$ sur $\mathbb{R}^*$.

**1** a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ et interpréter. b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter. c) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ et interpréter.

**2** a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x^2-x+1)e^x}{x^2}$. b) Montrer que $f'(x) > 0$. c) En déduire les variations de $f$. d) Calculer $f(1)$ et dresser le tableau de variations.

**3** a) Équation de la tangente $(T)$ au point d'abscisse 1. b) Nombre de solutions de $f(x) = 2$. c) Nombre de solutions de $f(x) = -2$.

✔ Solution

**1** a) $\frac{x-1}{x} \to 1$ et $e^x \to +\infty$ : $f(x) \to +\infty$ ; $\frac{f(x)}{x} = \frac{x-1}{x}\cdot\frac{e^x}{x} \to +\infty$ : branche parabolique de direction $(Oy)$. b) $\frac{x-1}{x} \to 1$ et $e^x \to 0$ : $f(x) \to 0$ ; asymptote horizontale $y = 0$ en $-\infty$. c) $x-1 \to -1$ et $e^x \to 1$ ; $\frac{-1}{0^-} = +\infty$ et $\frac{-1}{0^+} = -\infty$ : asymptote verticale $x = 0$.

**2** a) $f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)e^x$ : $f'(x) = \frac{1}{x^2}e^x + \left(1-\frac{1}{x}\right)e^x = \dfrac{(1+x^2-x)e^x}{x^2}$. b) $x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} > 0$ et $e^x > 0$. c) $f$ est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$. d) $f(1) = 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | ‖ | | $+$ | | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $+\infty$ | | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**3** a) $f'(1) = e$ : $(T) : y = e(x-1)$. b) $f(x) = 2$ : une solution sur $]-\infty;0[$ ($f$ y prend toutes les valeurs de $]0;+\infty[$) et une sur $]0;+\infty[$ : **deux solutions**. c) $f(x) = -2$ : aucune sur $]-\infty;0[$ ($f > 0$), une sur $]0;+\infty[$ : **une solution**.

## Exercice 13 : Session Rattrapage 2020

**I.** $g(x) = e^{1-x} + \dfrac{1}{x} - 2$ sur $]0;+\infty[$. 1. Montrer que $g'(x) < 0$. 2. Déduire le signe de $g(x)$ (remarquer que $g(1) = 0$).

**II.** $f(x) = (1-x)e^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln x$ sur $]0;+\infty[$ (unité : 2 cm).

**1** Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter.

**2** a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter.

**3** a) Montrer que $f'(x) = (x-2)\cdot g(x)$. b) Montrer que $f$ est décroissante sur $]0;1]$ et sur $[2;+\infty[$ et croissante sur $[1;2]$. c) Dresser le tableau de variations ($f(2) \approx 1{,}25$).

**4** Sachant $f(3) \approx 0{,}5$ et $f(4) \approx -1{,}9$, montrer que $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]3;4[$.

**5** Construire $(\mathcal{C})$.

**III.** $h(x) = f(x) - x$ sur $[1;2]$ ($h$ décroît de $h(1) = 0$ à $h(2)$). 1. a) Montrer que $f(x) \leq x$ sur $[1;2]$. b) Montrer que $1$ est l'unique solution de $f(x) = x$ sur $[1;2]$.
2. $u_0 = 2$, $u_{n+1} = f(u_n)$. a) Montrer que $1 \leq u_n \leq 2$. b) Montrer que $(u_n)$ est décroissante. c) En déduire qu'elle converge et calculer sa limite.

✔ Solution

**I.** $g'(x) = -e^{1-x} - \frac{1}{x^2} < 0$ ; $g$ strictement décroissante et $g(1) = 1 + 1 - 2 = 0$ : $g > 0$ sur $]0;1[$, $g < 0$ sur $]1;+\infty[$.

**II.**

**1** $(1-x)e^{1-x} \to e$, $-x^2 + 5x - 3 \to -3$, $-2\ln x \to +\infty$ : $f(x) \to +\infty$ ; asymptote verticale $x = 0$.

**2** a) Avec $t = x - 1 \to +\infty$ : $(1-x)e^{1-x} = -te^{-t} \to 0$ ; et $-x^2 + 5x - 3 - 2\ln x = -x^2\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2\ln x}{x^2}\right) \to -\infty$. b) $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{(1-x)e^{1-x}}{x} - x + 5 - \dfrac{3}{x} - \dfrac{2\ln x}{x} \to -\infty$ : branche parabolique de direction $(Oy)$.

**3** a) $f'(x) = -e^{1-x} - (1-x)e^{1-x} - 2x + 5 - \dfrac{2}{x} = (x-2)e^{1-x} - \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x}$ ; or $2x^2 - 5x + 2 = (2x-1)(x-2)$, d'où $f'(x) = (x-2)\left[e^{1-x} - 2 + \dfrac{1}{x}\right] = (x-2)g(x)$. b) Signe de $(x-2)g(x)$ : $(-)(+) < 0$ sur $]0;1[$, $(-)(-) > 0$ sur $]1;2[$, $(+)(-) < 0$ sur $]2;+\infty[$. c) $f(1) = 0-1+5-3-0 = 1$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $\approx 1{,}25$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

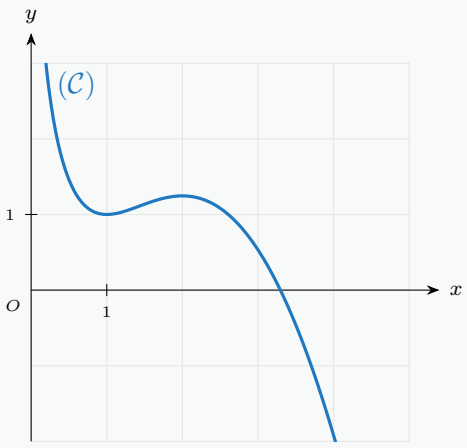
**4** $f$ est continue et strictement décroissante sur $[3;4]$ et $f(3) > 0 > f(4)$ : solution unique dans $]3;4[$.

**5** Voir la figure.

**III.**

**1** a) $h$ décroît sur $[1;2]$ et $h(1) = 0$ : $h(x) \leq 0$, soit $f(x) \leq x$. b) $h$ étant strictement décroissante, $h(x) = 0$ seulement pour $x = 1$.

**2** a) $f$ est croissante sur $[1;2]$ : si $1 \leq u_n \leq 2$, alors $1 = f(1) \leq u_{n+1} \leq f(2) \approx 1{,}25 \leq 2$. b) $u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$ (III.1.a). c) Décroissante et minorée par $1$ : convergente, de limite $\ell \in [1;2]$ avec $f(\ell) = \ell$ ($f$ continue), donc $\ell = 1$.



## Exercice 14 : Session Normale 2020

$f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2} - 4\right)$ sur $\mathbb{R}$ (unité : 2 cm).

**1** Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

**2** a) Montrer que $(\Delta) : y = -x + \frac{5}{2}$ est asymptote au voisinage de $-\infty$. b) Résoudre $e^{x-2} - 4 = 0$, puis montrer que $(\mathcal{C})$ est au-dessus de $(\Delta)$ sur $]-\infty; 2+\ln 4]$ et en dessous sur $[2+\ln 4; +\infty[$.

**3** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter.

**4** a) Montrer que $f'(x) = -\left(e^{x-2} - 1\right)^2$. b) Dresser le tableau de variations de $f$.

**5** Calculer $f''(x)$ puis montrer que $A(2;2)$ est un point d'inflexion.

**6** Montrer que $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ avec $2+\ln 3 < \alpha < 2+\ln 4$.

**7** Construire $(\Delta)$ et $(\mathcal{C})$.

**8** a) Montrer que $f$ admet une réciproque $f^{-1}$ définie sur $\mathbb{R}$. b) Construire la courbe de $f^{-1}$. c) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(2-\ln 3)$.

### ✔ Solution

Posons $t = e^{x-2} > 0$, de sorte que $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}t(t-4)$ et $t' = t$.

**1** En $-\infty$ : $t \to 0$, donc $f(x) \to +\infty$. En $+\infty$ : $t \to +\infty$ et $t(t-4) \to +\infty$, donc $f(x) \to -\infty$.

**2** a) $f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2}t(t-4) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$. b) $e^{x-2} = 4 \iff x = 2+\ln 4$. La différence $-\frac{1}{2}t(t-4)$ a le signe de $4-t$ : positive pour $x \le 2+\ln 4$, négative ensuite.

**3** $\dfrac{f(x)}{x} = -1 + \dfrac{5}{2x} - \dfrac{t(t-4)}{2x}$ et $\dfrac{t^2}{x} = \dfrac{e^{2x-4}}{x} \to +\infty$ : la limite vaut $-\infty$ ; branche parabolique de direction $(Oy)$.

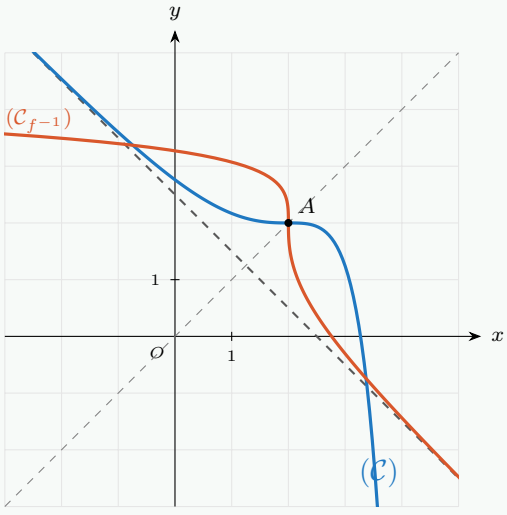
**4** a) $f'(x) = -1 - \frac{1}{2}(2t^2 - 4t) = -(t^2 - 2t + 1) = -(t-1)^2$. b) $f' \le 0$ (nul seulement en 2) : $f$ décroît strictement de $+\infty$ à $-\infty$ ; $f(2) = -2 + \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 2$.

**5** $f''(x) = -2(t-1)t$, qui change de signe en $x = 2$ ($t = 1$) : $A(2;2)$ est un point d'inflexion.

**6** $f(2+\ln 3) = -\ln 3 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 - \ln 3 > 0$ et $f(2+\ln 4) = \frac{1}{2} - \ln 4 < 0$ ; $f$ continue strictement décroissante : solution unique $\alpha$.

**7** Voir la figure.

**8** a) $f$ continue strictement décroissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ : bijection. b) Symétrique de $(\mathcal{C})$ par rapport à $y = x$ ; $(\Delta)$, perpendiculaire à la première bissectrice, est sa propre symétrique. c) $f(2+\ln 3) = 2 - \ln 3$ et $f'(2+\ln 3) = -(3-1)^2 = -4$ : $\left(f^{-1}\right)'(2-\ln 3) = -\dfrac{1}{4}$.



## Exercice 15 : Session Normale 2018

**I)** $g(x)=e^x-x^2+3x-1$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (tableau donné). 1. Vérifier que $g(0)=0$. 2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty;0]$ et $[0;+\infty[$.

**II)** $f(x)=(x^2-x)e^{-x}+x$ sur $\mathbb{R}$ (unité : 1 cm).

**1** a) Vérifier que $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}-\dfrac{x}{e^x}+x$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-x\big)$ ; asymptote $(D):y=x$. c) Vérifier que $f(x)=x\left(\dfrac{x-1+e^x}{e^x}\right)$ et calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$. d) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ et interpréter.

**2** a) Montrer que $f(x)-x$ et $x^2-x$ ont le même signe. b) En déduire la position de $(\mathcal{C})$ et $(D)$.

**3** a) Montrer que $f'(x)=g(x)e^{-x}$. b) En déduire les variations de $f$. c) Tableau de variations.

**4** a) Montrer que $f''(x)=(x^2-5x+4)e^{-x}$. b) En déduire deux points d'inflexion d'abscisses $1$ et $4$.

**5** Construire $(D)$ et $(\mathcal{C})$ ($f(4)\approx 4{,}2$).

**6** a) Montrer que $H:x\mapsto(x^2+2x+2)e^{-x}$ est une primitive de $h:x\mapsto -x^2e^{-x}$, puis que $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx=\frac{2e-5}{e}$. b) Par parties : $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx=\frac{e-2}{e}$. c) Aire du domaine limité par $(\mathcal{C})$, $(D)$, $x=0$ et $x=1$.

**III)** $u_0=\frac{1}{2}$, $u_{n+1}=f(u_n)$. 1. Montrer que $0\le u_n\le 1$. 2. Montrer que $(u_n)$ est décroissante. 3. En déduire sa limite.

### ✔ Solution

**I)** $g(0)=1-0+0-1=0$ ; $g$ croissante : $g\le 0$ sur $]-\infty;0]$ et $g\ge 0$ sur $[0;+\infty[$.

**II)**

**1** a) $\frac{x^2}{e^x}\to 0$ et $\frac{x}{e^x}\to 0$ : $f(x)\to+\infty$. b) $f(x)-x\to 0$ : $(D):y=x$ asymptote en $+\infty$. c) $x\cdot\frac{x-1+e^x}{e^x}=x\big((x-1)e^{-x}+1\big)=f(x)$. En $-\infty$ : $(x-1)e^{-x}\to(-\infty)(+\infty)=-\infty$, donc le facteur tend vers $-\infty$ et $f(x)\to(-\infty)\times(-\infty)=+\infty$. d) $\frac{f(x)}{x}=(x-1)e^{-x}+1\to-\infty$ : branche parabolique de direction $(Oy)$.

**2** a) $f(x)-x=(x^2-x)e^{-x}$ et $e^{-x}>0$. b) $x^2-x\ge 0$ sur $]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$ : $(\mathcal{C})$ au-dessus de $(D)$ ; en dessous sur $[0;1]$.

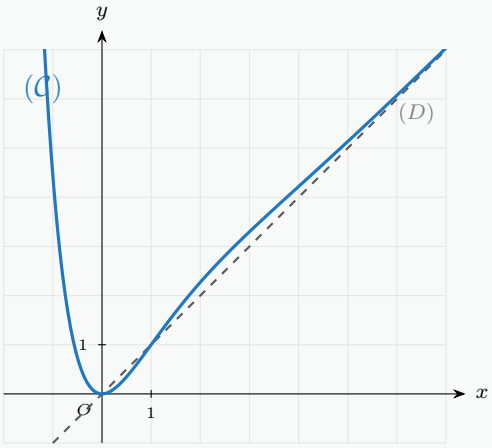
**3** a) $f'(x)=(2x-1)e^{-x}-(x^2-x)e^{-x}+1=e^{-x}\big(e^x-x^2+3x-1\big)=g(x)e^{-x}$. b) $f'$ a le signe de $g$ : $f$ décroît sur $]-\infty;0]$, croît sur $[0;+\infty[$. c) $f(0)=0$ : $+\infty\searrow 0\nearrow+\infty$.

**4** a) $f'(x)=(-x^2+3x-1)e^{-x}+1$ donc $f''(x)=(-2x+3)e^{-x}-(-x^2+3x-1)e^{-x}=(x^2-5x+4)e^{-x}$. b) $f''(x)=(x-1)(x-4)e^{-x}$ change de signe en $1$ et $4$ : points d'inflexion $(1;1)$ et $(4;f(4))$.

**5** Voir la figure.

**6** a) $H'(x)=(2x+2)e^{-x}-(x^2+2x+2)e^{-x}=-x^2e^{-x}$ ; $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-x}dx=-\big[H\big]_0^1=H(0)-H(1)=2-\frac{5}{e}=\frac{2e-5}{e}$. b) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx=\big[-xe^{-x}\big]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-\frac{1}{e}+1-\frac{1}{e}=\frac{e-2}{e}$. c) Sur $[0;1]$, $(D)$ est au-dessus : $\mathcal{A}=\displaystyle\int_0^1\big(x-f(x)\big)dx=\int_0^1(x-x^2)e^{-x}dx=\frac{e-2}{e}-\frac{2e-5}{e}=\frac{3-e}{e}$ cm$^2\approx 0{,}10$ cm$^2$.

**III)** 1. $f$ croissante sur $[0;1]$, $f(0)=0$, $f(1)=1$ : si $0\le u_n\le 1$, alors $0\le u_{n+1}\le 1$. 2. Sur $[0;1]$, $f(x)\le x$ (II.2) : $u_{n+1}\le u_n$. 3. Convergente vers $\ell\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ avec $f(\ell)=\ell$, soit $\ell^2-\ell=0$ : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.




*Remarque : l'énoncé recopié indiquait* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ *en II.1.d) ; la bonne valeur est* $-\infty$ *(corrigé dans la série).*

## Exercice 16 : Session Rattrapage 2017

**I.** $g(x)=1-(x+1)^2e^x$. 1. Vérifier que $g(0)=0$. 2. À partir de la courbe, montrer que $g\geq 0$ sur $]-\infty;0]$ et $g\leq 0$ sur $[0;+\infty[$.

**II.** $f(x)=x+1-(x^2+1)e^x$ (unité : 2 cm).

**1** a) Vérifier que $f(x)=x+1-4\left(\dfrac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x$ et en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ ; asymptote $(D)$ : $y=x+1$. c) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ est en dessous de $(D)$.

**2** a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$. b) Branche infinie en $+\infty$.

**3** a) Montrer que $f'(x)=g(x)$. b) Variations et tableau. c) Points d'inflexion d'abscisses $-3$ et $-1$.

**4** Construire $(D)$ et $(\mathcal{C}_f)$.

**5** a) $H:x\mapsto(x-1)e^x$ primitive de $xe^x$ ; $\displaystyle\int_{-1}^{0}xe^x\,dx=\frac{2}{e}-1$. b) Par parties : $\displaystyle\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x\,dx=3\left(1-\frac{2}{e}\right)$. c) Aire du domaine limité par $(\mathcal{C}_f)$, $(D)$, l'axe des ordonnées et $x=-1$.

✔ Solution

**I.** $g(0)=1-1=0$ ; la courbe donnée montre $g\geq 0$ sur $]-\infty;0]$ et $g\leq 0$ sur $[0;+\infty[$.

**II.**

**1** a) $4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2=x^2e^x$, d'où l'égalité. En $-\infty$ : $\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\to 0$ et $e^x\to 0$ : $f(x)\to-\infty$. b) $f(x)-(x+1)=-(x^2+1)e^x=-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x\to 0$. c) $-(x^2+1)e^x<0$.

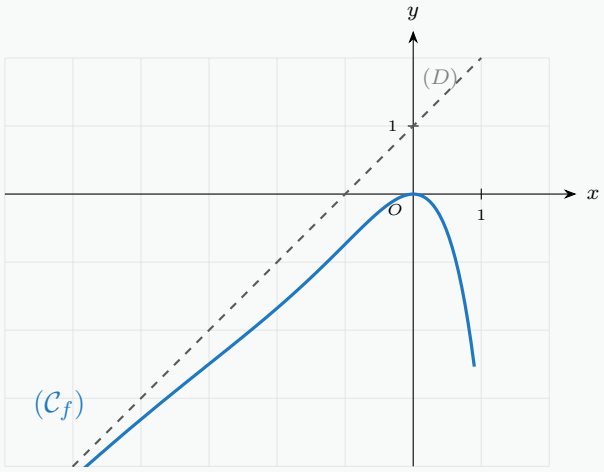
**2** a) $f(x)=x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$ et le crochet tend vers $-\infty$ : $f(x)\to-\infty$. b) $\frac{f(x)}{x}=1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\to-\infty$ : branche parabolique de direction $(Oy)$.

**3** a) $f'(x)=1-2xe^x-(x^2+1)e^x=1-(x+1)^2e^x=g(x)$. b) $f$ croît sur $]-\infty;0]$ et décroît sur $[0;+\infty[$ ; $f(0)=0$ : $-\infty\nearrow 0\searrow-\infty$. c) $f''(x)=g'(x)=-\left[2(x+1)+(x+1)^2\right]e^x=-(x+1)(x+3)e^x$ change de signe en $-3$ et $-1$.

**4** Voir la figure.

**5** a) $H'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$ ; $\displaystyle\int_{-1}^{0}xe^x dx=H(0)-H(-1)=-1+\frac{2}{e}$. b) $\displaystyle\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x dx=$

$\left[(x^2+1)e^x\right]_{-1}^{0} - 2\displaystyle\int_{-1}^{0} xe^x dx = 1 - \frac{2}{e} - 2\left(\frac{2}{e} - 1\right) = 3 - \frac{6}{e}$. c) $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{-1}^{0} \big((x+1) - f(x)\big)dx = 3\left(1 - \frac{2}{e}\right)$ u.a. $= 12\left(1 - \frac{2}{e}\right)$ cm$^2 \approx 3{,}17$ cm$^2$ (1 u.a. $= 4$ cm$^2$).




## Exercice 17 : Session Normale 2009

$f(x) = 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)$.

**I)** 1. Vérifier que $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$, en déduire $D_f = \mathbb{R}$ et que $1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$. 2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ; montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln 4$ et interpréter. 3. a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x} - 1\right)}{\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1}$ et $f'(0) = 0$. b) En déduire les variations de $f$. 4. a) Vérifier que $f(x) = 2x + 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$. b) Montrer que $(D) : y = 2x$ est asymptote en $+\infty$. 5. a) Vérifier que $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$. b) Signes. c) En déduire $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \le \sqrt{e^x}$ sur $[0;\ln 4]$. d) Montrer que $f(x) \le x$ sur $[0;\ln 4]$. 6. Construire $(\mathcal{C})$.
**II)** $u_0 = 1$, $u_{n+1} = f(u_n)$. 1. Montrer que $0 \le u_n \le \ln 4$. 2. Montrer que $(u_n)$ est décroissante. 3. Limite.

### ✔ Solution

Posons $s = \sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}} > 0$ ; $s' = \frac{s}{2}$.

**I)**

**1** $s^2 - 2s + 2 = (s-1)^2 + 1 \ge 1 > 0$ : $D_f = \mathbb{R}$. En divisant par $s^2 > 0$ : $1 - \frac{2}{s} + \frac{2}{s^2} > 0$.

**2** $s \to +\infty$ : $f(x) \to +\infty$. En $-\infty$ : $s \to 0$, $f(x) \to 2\ln 2 = \ln 4$ ; asymptote horizontale $y = \ln 4$.

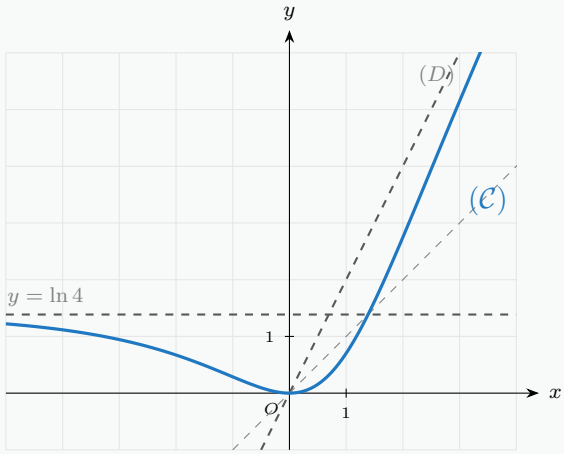
**3** a) $(s^2 - 2s + 2)' = s^2 - s$, donc $f'(x) = \dfrac{2(s^2-s)}{(s-1)^2+1} = \dfrac{2s(s-1)}{(s-1)^2+1}$ ; en 0, $s = 1$ : $f'(0) = 0$. b) $s - 1 \ge 0 \iff x \ge 0$ : $f$ décroît sur $]-\infty;0]$, croît sur $[0;+\infty[$ ; $f(0) = 2\ln 1 = 0$.

**4** a) $s^2 - 2s + 2 = e^x\left(1 - \frac{2}{s} + \frac{2}{s^2}\right)$, d'où $f(x) = 2x + 2\ln\left(1 - \frac{2}{s} + \frac{2}{s^2}\right)$. b) Le logarithme tend vers $\ln 1 = 0$.

**5** a) $(s-1)(s-2) = s^2 - 3s + 2$. b) $s - 2 \ge 0 \iff x \ge \ln 4$ ; le produit est négatif sur $[0;\ln 4]$, positif ailleurs. c) Sur $[0;\ln 4]$ : $s^2 - 3s + 2 \le 0$, soit $s^2 - 2s + 2 \le s$. d) ln croissante : $f(x) = 2\ln(s^2 - 2s + 2) \le 2\ln s = x$.

**6** Voir la figure.

**II)** 1. $f$ croissante sur $[0;\ln 4]$, $f(0) = 0$ et $f(\ln 4) = 2\ln(4 - 4 + 2) = \ln 4$ : si $u_n \in [0;\ln 4]$ alors $u_{n+1} \in [0;\ln 4]$ ($u_0 = 1 \le \ln 4$). 2. $f(x) \le x$ sur $[0;\ln 4]$ : $u_{n+1} \le u_n$. 3. Convergente vers $\ell \in [0;1]$ avec $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire égalité en 5.c) : $(s-1)(s-2) = 0$, donc $\ell \in \{0;\ln 4\}$ ; comme $\ell \le 1 < \ln 4$ : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.




## Exercice 18 : Session Rattrapage 2008

**I)** $g(x) = e^{2x} - 2x$. 1. Calculer $g'(x)$ ; variations. 2. En déduire que $g(x) > 0$.
**II)** $f(x) = \ln\left(e^{2x} - 2x\right)$.

**1** a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. b) Vérifier que $\dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{e^{2x}}{x} - 2\right)\dfrac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}$. c) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. d) Branche infinie en $-\infty$.

**2** a) Pour $x \geq 0$, vérifier que $1 - \dfrac{2x}{e^{2x}} > 0$ et que $f(x) = 2x + \ln\left(1 - \dfrac{2x}{e^{2x}}\right)$. b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. c) Asymptote $(D) : y = 2x$. d) Montrer que $f(x) - 2x \leq 0$ sur $[0;+\infty[$.

**3** a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{2\left(e^{2x}-1\right)}{g(x)}$. b) Signe de $f'$ et tableau de variations.

**4** Tracer $(D)$ et $(\mathcal{C})$.

✔ Solution

**I)** $g'(x) = 2e^{2x} - 2 = 2(e^{2x} - 1)$ : négatif sur $]-\infty;0[$, positif sur $]0;+\infty[$. Minimum $g(0) = 1 > 0$, donc $g(x) > 0$.

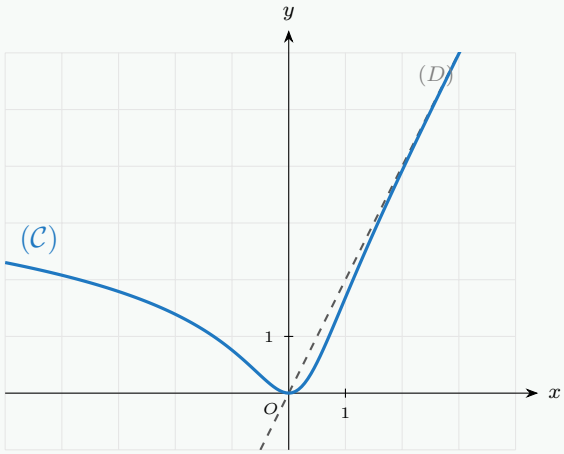
**II)**

**1** a) $e^{2x} \to 0$ et $-2x \to +\infty$ : $g(x) \to +\infty$, donc $f(x) \to +\infty$. b) $\left(\frac{e^{2x}}{x} - 2\right) \cdot \frac{\ln g(x)}{g(x)} = \frac{g(x)}{x} \cdot \frac{\ln g(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{x}$. c) $\frac{e^{2x}}{x} \to 0$ donc le premier facteur $\to -2$ ; $g(x) \to +\infty$ donc $\frac{\ln g(x)}{g(x)} \to 0$ : $\frac{f(x)}{x} \to 0$. d) Branche parabolique de direction $(Ox)$ au voisinage de $-\infty$.

**2** a) $g(x) > 0$ donne $e^{2x} > 2x$, soit $1 - \frac{2x}{e^{2x}} > 0$ ; et $f(x) = \ln\left(e^{2x}\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right)\right) = 2x + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right)$. b) $\frac{2x}{e^{2x}} \to 0$, donc le logarithme $\to 0$ et $f(x) \to +\infty$. c) $f(x) - 2x \to 0$. d) Pour $x \geq 0 : 0 < 1 - \frac{2x}{e^{2x}} \leq 1$, donc $\ln(\dots) \leq 0$ : $(\mathcal{C})$ est en dessous de $(D)$.

**3** a) $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)} = \dfrac{2(e^{2x}-1)}{g(x)}$. b) $f'$ a le signe de $e^{2x} - 1$ ; $f(0) = 0$ : $+\infty \searrow 0 \nearrow +\infty$.

**4** Voir la figure.




## Exercice 19 : Session Normale 2015

**I.** $g(x) = e^x - 2x$. 1. Variations de $g$. 2. Vérifier que $g(\ln 2) = 2(1 - \ln 2)$ et son signe. 3. En déduire $g(x) > 0$.

**II.** $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 2x}$ (unité : 1 cm).

**1** a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$. b) Interpréter.

**2** a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{(1-x)e^x}{(e^x - 2x)^2}$. b) Tableau de variations.

**3** Montrer que $(T) : y = x$ est tangente à $(\mathcal{C})$ en $O$.

**4** Tracer $(T)$ et $(\mathcal{C})$.

**5** a) Montrer que $xe^{-x} \leq \dfrac{x}{e^x - 2x} \leq \dfrac{1}{e-2}$ sur $[0;+\infty[$. b) Par parties : $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx = 1 - \frac{2}{e}$. c) Montrer que $1 - \dfrac{2}{e} \leq \mathcal{A}(E) \leq \dfrac{1}{e-2}$.

**III.** $h = f$ sur $]-\infty;0]$. 1. $h$ admet une réciproque définie sur $J$. 2. Tracer $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$.

**IV.** $u_0 = -2$, $u_{n+1} = h(u_n)$. 1. $u_n \leq 0$. 2. $(u_n)$ croissante. 3. Limite.

### ✔ Solution

**I.** $g'(x) = e^x - 2$ : $g$ décroît sur $]-\infty;\ln 2]$, croît sur $[\ln 2;+\infty[$. Minimum $g(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 = 2(1-\ln 2) > 0$ (car $\ln 2 < 1$). Donc $g(x) > 0$.

**II.**

**1** a) $f(x) = \dfrac{1}{\frac{e^x}{x} - 2}$ pour $x \neq 0$ ; en $+\infty$, $\frac{e^x}{x} \to +\infty$ : $f(x) \to 0$ ; en $-\infty$, $\frac{e^x}{x} \to 0$ : $f(x) \to -\frac{1}{2}$. b) Asymptotes horizontales : $y = 0$ en $+\infty$ et $y = -\frac{1}{2}$ en $-\infty$.

**2** a) $f'(x) = \dfrac{(e^x - 2x) - x(e^x - 2)}{(e^x - 2x)^2} = \dfrac{(1-x)e^x}{(e^x - 2x)^2}$. b) $f$ croît sur $]-\infty;1]$, décroît sur $[1;+\infty[$ ; $f(1) = \frac{1}{e-2} \approx 1{,}4$ : $-\frac{1}{2} \nearrow \frac{1}{e-2} \searrow 0$.

**3** $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ : $(T) : y = x$.

**4** Voir la figure.

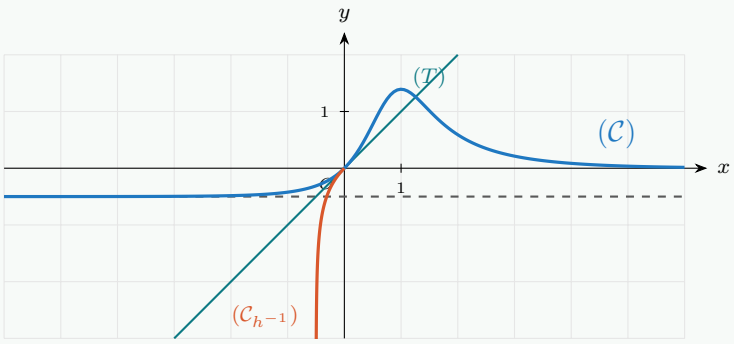
**5** a) Pour $x \geq 0$ : $0 < e^x - 2x \leq e^x$, donc $\frac{x}{e^x - 2x} \geq \frac{x}{e^x}$ ; et $f(x) \leq f(1) = \frac{1}{e-2}$ (maximum). b) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e}$. c) $f \geq 0$ sur $[0;1]$ : $\mathcal{A}(E) = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ ; en intégrant l'encadrement de a) sur $[0;1]$ : $1 - \frac{2}{e} \leq \mathcal{A}(E) \leq \frac{1}{e-2}$.

**III.** $h$ est continue et strictement croissante sur $]-\infty;0]$ : réciproque définie sur $J = \left]-\frac{1}{2};0\right]$ ; $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$

est la symétrique de $(\mathcal{C}_h)$ par rapport à $y = x$.

**IV.**

1. $u_0 \leq 0$ ; si $u_n \leq 0$, alors $u_{n+1} = h(u_n) \in \left]-\frac{1}{2}; 0\right]$.
2. Pour $x \leq 0$ : $e^x - 2x - 1 \geq 0$ (fonction décroissante sur $]-\infty; 0]$, nulle en 0), donc $g(x) \geq 1$ et $h(x) - x = \dfrac{x\big(1 - g(x)\big)}{g(x)} \geq 0$. Ainsi $u_{n+1} \geq u_n$.
3. Croissante et majorée par 0 : convergente vers $\ell \leq 0$ avec $h(\ell) = \ell$, soit $\ell\big(1 - g(\ell)\big) = 0$ ; or $g(x) = 1$ seulement pour $x = 0$ sur $]-\infty; 0]$ : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.




*Remarque : l'énoncé recopié écrivait des inégalités strictes en II.5.a), fausses en $x = 0$ et $x = 1$ ; la série a été corrigée avec $\leq$.*

**Exercices complémentaires (extraits du baccalauréat)**

## Exercice 20 : Session Normale 2022

$f(x) = x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$ sur $\mathbb{R}$ (unité : 1 cm).

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter.
3. a) Montrer que $(\Delta) : y = x$ est asymptote en $-\infty$. b) Signe de $f(x) - x$ et position.
4. a) Montrer que $f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 + xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)$. b) Vérifier que $x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right) \geq 0$ et en déduire le signe de $f'$. c) Tableau de variations.
5. a) Montrer que $f''(x) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$ avec $g(x) = (2x + 4)e^{\frac{x}{2}} - x - 4$. b) Signe de $g$ (courbe, $g(\alpha) = 0$, $\alpha \approx -4{,}5$). c) Concavité et points d'inflexion.
6. Construire $(C)$.
7. a) $f$ admet une réciproque définie sur $\mathbb{R}$. b) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(\ln 4)$.
8. $u_0 = 1$, $u_{n+1} = f(u_n)$. a) $0 < u_n < \ln 4$. b) $(u_n)$ décroissante. c) Limite.

**✔ Solution**

Posons $s = e^{\frac{x}{2}}$.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ; en $-\infty$ : $(s-1)^2 \to 1$ et $x \to -\infty$ : $f(x) \to -\infty$.
2. $\frac{f(x)}{x} = (s-1)^2 \to +\infty$ : branche parabolique de direction $(Oy)$.
3. a) $f(x) - x = x\left[(s-1)^2 - 1\right] = xs(s-2)$ ; en $-\infty$ : $xe^{\frac{x}{2}} \to 0$ et $s - 2 \to -2$ : $f(x) - x \to 0$. b) $s - 2 \geq 0 \iff x \geq \ln 4$. Signe de $x(s-2)$ : positif sur $]-\infty; 0[$ et $]\ln 4; +\infty[$, négatif sur $]0; \ln 4[$.

$(C)$ est au-dessus de $(\Delta)$ sur $]-\infty;0]\cup[\ln 4;+\infty[$, en dessous sur $[0;\ln 4]$ ; ils se coupent en $x=0$ et $x=\ln 4$.

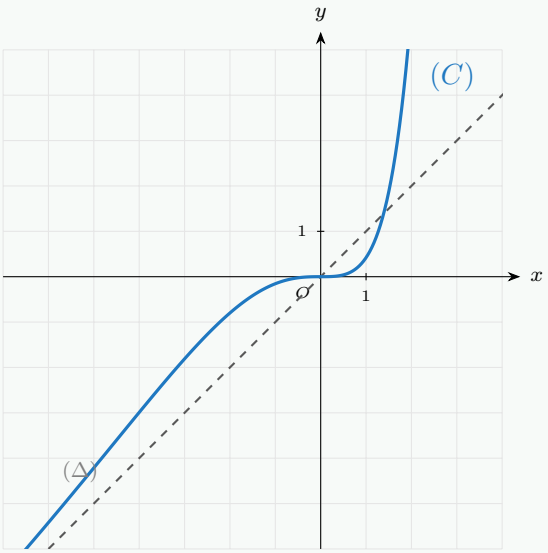
**4** a) $f'(x)=(s-1)^2+x\cdot 2(s-1)\cdot\frac{s}{2}=(s-1)^2+xs(s-1)$. b) $x$ et $s-1$ ont le même signe : $x(s-1)\geq 0$, donc $f'(x)\geq 0$ (nul seulement en 0). c) $f$ croît strictement de $-\infty$ à $+\infty$ ; $f(0)=0$.

**5** a) $f''(x)=2(s-1)\frac{s}{2}+s(s-1)+x\frac{s}{2}(s-1)+xs\frac{s}{2}=\frac{s}{2}\left[4(s-1)+x(s-1)+xs\right]=\frac{s}{2}\left[(2x+4)s-x-4\right]$. b) D'après la courbe : $g>0$ sur $]-\infty;\alpha[$, $g<0$ sur $]\alpha;0[$, $g>0$ sur $]0;+\infty[$ $(g(0)=0)$. c) $(C)$ convexe sur $]-\infty;\alpha]$ et $[0;+\infty[$, concave sur $[\alpha;0]$ : points d'inflexion d'abscisses $\alpha$ et 0.

**6** Voir la figure.

**7** a) $f$ continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. b) $f(\ln 4)=\ln 4\,(2-1)^2=\ln 4$ et $f'(\ln 4)=1+2\ln 4$ : $\left(f^{-1}\right)'(\ln 4)=\dfrac{1}{1+2\ln 4}$.

**8** a) $f$ strictement croissante, $f(0)=0$, $f(\ln 4)=\ln 4$ : si $0<u_n<\ln 4$ alors $0<u_{n+1}<\ln 4$ $(u_0=1)$. b) Sur $]0;\ln 4[$, $f(x)<x$ : $u_{n+1}<u_n$. c) Convergente vers $\ell\in[0;1]$ avec $f(\ell)=\ell$, donc $\ell\in\{0;\ln 4\}$ : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.




## Exercice 21 : Rattrapage 2019

$f(x)=2+8\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2e^{x-4}$ sur $\mathbb{R}^*$ (unité : 1 cm).

**Première partie.** 1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$ ; interprétation. b) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$ ; interprétation. 2. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. b) Direction asymptotique $(Oy)$ en $+\infty$. 3. a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$. b) $x^2-2x+4>0$. c) Variations. d) Tableau. 4. Tracer $(C_f)$. 5. a) $H:x\mapsto\frac{1}{x}e^{x-4}$ primitive de $h:x\mapsto\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ sur $[2;4]$. b) $f(x)=2+8e^{x-4}-32\dfrac{x-1}{x^2}e^{x-4}$.

**Deuxième partie.** $g(x)=8(x-2)e^{x-4}-x^2$ sur $[2;4]$. 1. a) $g(4)$. b) $g(x)=-(x-4)^2e^{x-4}+x^2\left(e^{x-4}-1\right)$. c) $g(x)\leq 0$ sur $[2;4]$. 2. a) $f(x)-x=\left(\dfrac{x-2}{x^2}\right)g(x)$. b) $f(x)\leq x$ sur $[2;4]$. 3. $u_0=3$, $u_{n+1}=f(u_n)$. a) $2\leq u_n\leq 4$. b) Monotonie, convergence. c) Limite.

✔ Solution

**Première partie.**

**1** a) $\left(\frac{x-2}{x}\right)^2\to 1$ et $e^{x-4}\to 0$ : $f\to 2$ ; asymptote horizontale $y=2$ en $-\infty$. b) $\left(\frac{x-2}{x}\right)^2\to+\infty$ et $e^{x-4}\to e^{-4}>0$ : $f\to+\infty$ ; asymptote verticale $x=0$.

**2** a) $+\infty$. b) $\frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x} + 8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 \frac{e^{x-4}}{x} \to +\infty$.

**3** a) Avec $u = \left(1-\frac{2}{x}\right)^2$, $u' = \frac{4(x-2)}{x^3}$ : $f'(x) = 8e^{x-4}(u'+u) = 8e^{x-4}(x-2)\dfrac{4+x(x-2)}{x^3} = \dfrac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$. b) $x^2-2x+4 = (x-1)^2+3 > 0$. c) $f'$ a le signe de $\frac{x-2}{x^3}$ : positif sur $]-\infty;0[$ et $]2;+\infty[$, négatif sur $]0;2[$. d) $f(2) = 2$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**4** Voir la figure.

**5** a) $H'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{x-4} + \frac{1}{x}e^{x-4} = \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$. b) $8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 = 8 - \frac{32}{x} + \frac{32}{x^2} = 8 - 32\frac{x-1}{x^2}$.

**Deuxième partie.**

**1** a) $g(4) = 16-16 = 0$. b) $-(x-4)^2e^{x-4} + x^2e^{x-4} - x^2 = (8x-16)e^{x-4} - x^2 = g(x)$. c) $x \le 4 \Rightarrow e^{x-4} \le 1$ : les deux termes sont $\le 0$, donc $g(x) \le 0$ (et même $g(x) < 0$ sur $[2;4[$).

**2** a) $f(x) - x = (2-x) + \frac{8(x-2)^2}{x^2}e^{x-4} = \frac{x-2}{x^2}\left[8(x-2)e^{x-4} - x^2\right] = \frac{x-2}{x^2}g(x)$. b) $x-2 \ge 0$ et $g \le 0$.

**3** a) $f$ croissante sur $[2;4]$, $f(2) = 2$, $f(4) = 2 + 8 \times \frac{1}{4} = 4$ : si $2 \le u_n \le 4$, alors $2 \le u_{n+1} \le 4$. b) $u_{n+1} = f(u_n) \le u_n$ : décroissante et minorée, donc convergente. c) La limite $\ell \in [2;3]$ vérifie $f(\ell) = \ell$, soit $(\ell-2)g(\ell) = 0$ ; comme $g < 0$ sur $[2;4[$ : $\ell = 2$.

