CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 6

Fonctions logarithmes

2BAC PC & SVT

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$f_1(x) = 2x^4 - \ln x$; $f_2(x) = \ln(2x+5)$; $f_3(x) = \ln(2-x)$; $f_4(x) = \ln(x^2-9)$;

$f_5(x) = \ln(x+3) + \ln(x-3)$; $f_6(x) = \ln\left(\dfrac{x+5}{x-4}\right)$.

Solution

- $D_{f_1} =]0;+\infty[$; $D_{f_2} = \left]-\frac{5}{2};+\infty\right[$; $D_{f_3} =]-\infty;2[$.
- $x^2-9>0 \iff |x|>3$: $D_{f_4} =]-\infty;-3[\cup]3;+\infty[$.
- Il faut $x+3>0$ et $x-3>0$: $D_{f_5} =]3;+\infty[$.
- $\dfrac{x+5}{x-4} > 0$ (tableau de signes) : $D_{f_6} =]-\infty;-5[\cup]4;+\infty[$.

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \ln\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right) + \ln\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right) \qquad B = \ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + \ln\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + \ln\left(2+\sqrt{2}\right)$$

$$C = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\right) + \ln\left(9\sqrt{3}\right) - \ln\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$$

Solution

- $A = \ln\left((\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})\right) = \ln(6-5) = \ln 1 = \boxed{0}$.
- $\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) = 4-(2+\sqrt{2}) = 2-\sqrt{2}$, donc $B = \ln\left((2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})\right) = \boxed{\ln 2}$.
- $C = -\ln\left((\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})\right) + \ln\left(9\sqrt{3}\right) = -\ln 3 + \ln\left(9\sqrt{3}\right) = \ln\left(3\sqrt{3}\right) = \boxed{\frac{3}{2}\ln 3}$.

Exercice 3

1. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $3^n > 192021$.
2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $0{,}85^n < 0{,}001$.

Solution

1. ln est strictement croissante : $3^n > 192021 \iff n\ln 3 > \ln 192021 \iff n > \dfrac{\ln 192021}{\ln 3} \approx 11{,}07$.
   Donc $n = 12$.
   (Contrôle : $3^{11} = 177147 < 192021 < 3^{12} = 531441$.)
2. $0{,}85^n < 0{,}001 \iff n\ln 0{,}85 < \ln 0{,}001 \iff n > \dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}85} \approx 42{,}5$ (division par $\ln 0{,}85 < 0$).
   Donc $n = 43$.

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} x^2\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)\ ;\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{3+2\ln x}{6-4\ln x}\ ;\quad \lim_{x\to 1^+} 2x-3\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\ ;$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x-3\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\ ;\quad \lim_{x\to+\infty}\ln(3x^2-4)-\ln(x^4+5)\ ;\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+2x)}{x}$$

Solution

1. $x^2\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)=2x+x\times(x\ln x)\to 0+0\times 0=0.$
2. $\dfrac{3+2\ln x}{6-4\ln x}=\dfrac{\frac{3}{\ln x}+2}{\frac{6}{\ln x}-4}\to -\dfrac{1}{2}.$
3. $\dfrac{x}{x-1}\xrightarrow[x\to 1^+]{}+\infty$, donc $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\to+\infty$ et la limite vaut $-\infty$.
4. $\dfrac{x}{x-1}\to 1$, donc $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\to 0$ et la limite vaut $+\infty$.
5. $\ln\left(\dfrac{3x^2-4}{x^4+5}\right)$ et $\dfrac{3x^2-4}{x^4+5}\to 0^+$: la limite vaut $-\infty$.
6. $\dfrac{\ln(1+2x)}{x}=2\times\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}\to 2\times 1=2.$

Exercice 5

Calculer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle donné :

$f_1(x)=2x^4-\ln x$, $I=]0;+\infty[$; $f_2(x)=x-3+\ln(-x)$, $I=]-\infty;0[$;
$f_3(x)=\ln(3x-5)-\ln(x-3)$, $I=]3;+\infty[$; $f_4(x)=\ln(3x^2-5x+4)$, $I=\mathbb{R}$.

Solution

- $f_1'(x)=8x^3-\dfrac{1}{x}$; $f_2'(x)=1+\dfrac{-1}{-x}=1+\dfrac{1}{x}.$
- $f_3'(x)=\dfrac{3}{3x-5}-\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{-4}{(3x-5)(x-3)}.$
- $3x^2-5x+4>0$ sur $\mathbb{R}$ ($\Delta=25-48<0$) : $f_4'(x)=\dfrac{6x-5}{3x^2-5x+4}.$

Exercice 6

Déterminer les primitives de chaque fonction sur l'intervalle donné :

$f_1(x)=4x-\dfrac{1}{x}$, $]0;+\infty[$; $f_2(x)=\dfrac{1}{2x+6}$, $]-3;+\infty[$; $f_3(x)=-\dfrac{3}{x-1}$, $]-\infty;1[$;

$f_4(x)=\dfrac{x+2}{x^2+4x+7}$, $\mathbb{R}$; $f_5(x)=\dfrac{(\ln x)^4}{x}$, $]0;+\infty[$.

Solution

- $F_1(x)=2x^2-\ln x+C$; $F_2(x)=\dfrac{1}{2}\ln(2x+6)+C$; $F_3(x)=-3\ln(1-x)+C.$
- $f_4=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{u'}{u}$ avec $u=x^2+4x+7>0$: $F_4(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+4x+7)+C.$
- $f_5=u'u^4$ avec $u=\ln x$: $F_5(x)=\dfrac{(\ln x)^5}{5}+C.$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]\frac{3}{2}; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{4x-7}{2x-3}$.

1. Vérifier que pour tout x de I : $f(x) = 2 - \dfrac{1}{2x-3}$.
2. Déterminer les primitives de f sur I.
3. Déterminer la primitive F de f sur I qui vérifie $F(2) = -3$.

Solution

1. $2 - \dfrac{1}{2x-3} = \dfrac{4x-6-1}{2x-3} = \dfrac{4x-7}{2x-3}$.
2. $F(x) = 2x - \dfrac{1}{2}\ln(2x-3) + C$.
3. $F(2) = 4 - \frac{1}{2}\ln 1 + C = 4 + C = -3$, d'où $C = -7$: $F(x) = 2x - \dfrac{1}{2}\ln(2x-3) - 7$.

Exercice 8

1. Déterminer les réels a et b tels que : $\dfrac{2x+3}{x^2+2x} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+2}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$.
2. En déduire les primitives de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+2x}$.

Solution

1. $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+2} = \dfrac{(a+b)x + 2a}{x(x+2)}$: $2a = 3$ et $a + b = 2$, donc $a = \dfrac{3}{2}$, $b = \dfrac{1}{2}$.
2. $F(x) = \dfrac{3}{2}\ln x + \dfrac{1}{2}\ln(x+2) + C$.

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-5x+9}{(x-2)^2}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq 2$: $f(x) = a + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{(x-2)^2}$.
2. Déterminer les primitives de f sur $]2; +\infty[$.

Solution

1. Avec $t = x-2$: $x^2-5x+9 = (t+2)^2 - 5(t+2) + 9 = t^2 - t + 3$, donc $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{3}{(x-2)^2}$: $a = 1$, $b = -1$, $c = 3$.
2. $F(x) = x - \ln(x-2) - \dfrac{3}{x-2} + C$.

Exercice 10

f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(0) = 0$ et $f(x) = x\ln x$ si $x > 0$. Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. a) Montrer que f est continue à droite en 0.
   b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, et interpréter ce résultat graphiquement.
2. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
3. Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de

$+\infty$.

4 a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

5 Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

✔ Solution

1 a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0 = f(0)$ (limite usuelle).

b) $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$: f n'est pas dérivable à droite en 0 ; $(\mathcal{C}_f)$ admet en O une demi-tangente verticale.

2 $x \to +\infty$ et $\ln x \to +\infty$: $f(x) \to +\infty$.

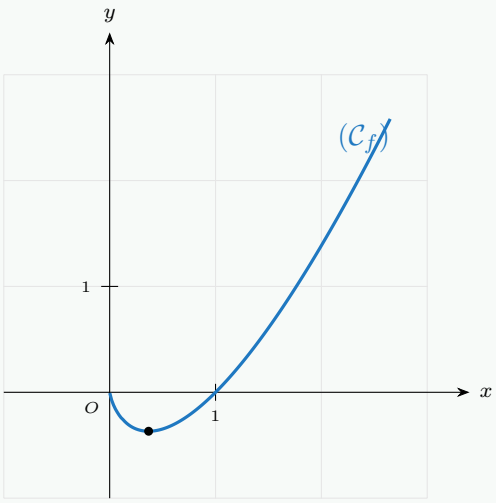
3 $\dfrac{f(x)}{x} = \ln x \to +\infty$: branche parabolique de direction (Oy).

4 a) $f'(x) = \ln x + 1$.

b) $f'(x) \geq 0 \iff \ln x \geq -1 \iff x \geq \frac{1}{e}$; $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

5 $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en O et en $(1;0)$:



Exercice 11

Partie 1 : g est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 - 2\ln x$.

1 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$.

2 a) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

b) Étudier le signe de $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g.

3 En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie 2 : f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x - 4 + \dfrac{3+2\ln x}{x}$, et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et en déduire une interprétation graphique de ce résultat.

2 a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 4$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

3 a) Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

4 a) Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$: $f''(x) = \dfrac{4\ln x}{x^3}$.

b) Étudier le signe de f'' et en déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion que l'on précisera.

c) Donner une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1.

5 Tracer (T) et $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

6 Montrer que la fonction $F : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - 4x + (3+\ln x)\ln x$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

✔ Solution

Partie 1.

1 $g(x) = x^2\left(1 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x^2}\right) \to +\infty$ en $+\infty$; en 0^+, $-2\ln x \to +\infty$ donc $g(x) \to +\infty$.

2 $g'(x) = 2x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{x}$, du signe de $x-1$; $g(1) = 0$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3 Le minimum de g est $g(1) = 0$: $g(x) \geq 0$ sur $]0;+\infty[$, avec égalité seulement en 1.

Partie 2.

1 $3+2\ln x \to -\infty$ et $x \to 0^+$, donc $\dfrac{3+2\ln x}{x} \to -\infty$ et $f(x) \to -\infty$: la droite $x = 0$ est asymptote verticale.

2 a) $f(x) = x - 4 + \dfrac{3}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x} \to +\infty$.

b) $f(x) - (x-4) = \dfrac{3}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x} \to 0$.

3 a) $f'(x) = 1 + \dfrac{\frac{2}{x}\cdot x - (3+2\ln x)}{x^2} = 1 + \dfrac{-1-2\ln x}{x^2} = \dfrac{x^2-1-2\ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) $f'(x) \geq 0$ (nul seulement en 1) : f est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$; $f(1) = 0$.

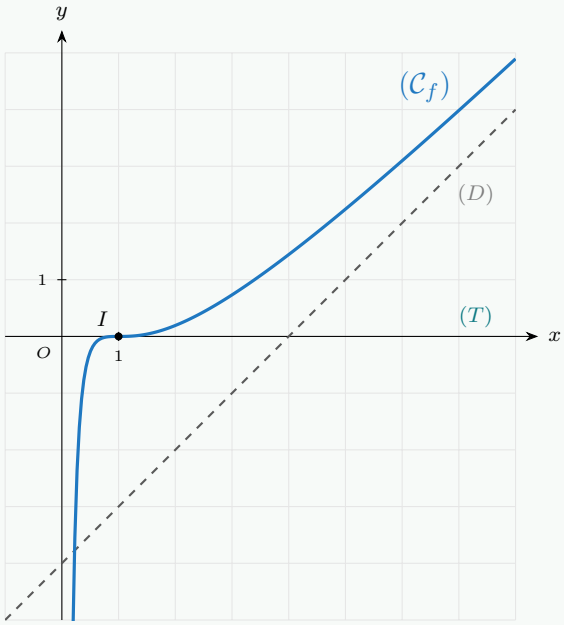
4 a) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2\ln x}{x^2}$, donc $f''(x) = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{2(x-2x\ln x)}{x^4} = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{4\ln x}{x^3} = \dfrac{4\ln x}{x^3}$.

b) f'' a le signe de $\ln x$: $(\mathcal{C}_f)$ est concave sur $]0;1]$ et convexe sur $[1;+\infty[$; point d'inflexion $I(1;0)$.

c) $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$: $(T) : y = 0$ (l'axe des abscisses).

5 Voir la figure.

6 $F'(x) = x - 4 + \dfrac{1}{x}\ln x + (3+\ln x)\dfrac{1}{x} = x - 4 + \dfrac{3+2\ln x}{x} = f(x)$.



Exercice 12

Partie 1 : g est la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $g(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)$.
2. Montrer que pour tout x de $]-1;+\infty[$: $g'(x)=\dfrac{2(x+1)^2+1}{x+1}$.
3. Étudier le signe de $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g.
4. a) Calculer $g(0)$.
   b) En déduire le signe de $g(x)$ sur les deux intervalles $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$.

Partie 2 : f est la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x)=x-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$, et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$ et donner une interprétation graphique du résultat.
2. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est une asymptote de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
   c) Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et de la droite (Δ).
3. a) Montrer que pour tout x de $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.
   b) Dresser le tableau de variations de f.
4. Représenter la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (Δ).
   (On admet que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion d'abscisse comprise entre 3 et 4.)

Partie 3 : On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $0\leq u_n\leq 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

✔ Solution

Partie 1.

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$; en -1^+ : $x^2+2x \to -1$ et $\ln(x+1) \to -\infty$, donc $g(x) \to -\infty$.

2 $g'(x) = 2x+2+\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2(x+1)^2+1}{x+1}$.

3 $g'(x) > 0$: g est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$.

4 $g(0) = 0$; g étant strictement croissante : $g(x) < 0$ sur $]-1;0[$ et $g(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$.

Partie 2.

1 $\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} \to \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$, donc $f(x) \to +\infty$: asymptote verticale $x = -1$.

2 a) Avec $t = x+1 \to +\infty$: $\dfrac{\ln t}{t} \to 0$, donc $f(x) \to +\infty$.

b) $f(x) - x = -\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} \to 0$.

c) $f(x) - x$ a le signe de $-\ln(x+1)$: $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de (Δ) sur $]-1;0[$, au-dessous sur $]0;+\infty[$, et la coupe en O.

3 a) $f'(x) = 1 - \dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x+1-1+\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.

b) $f(0) = 0$:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

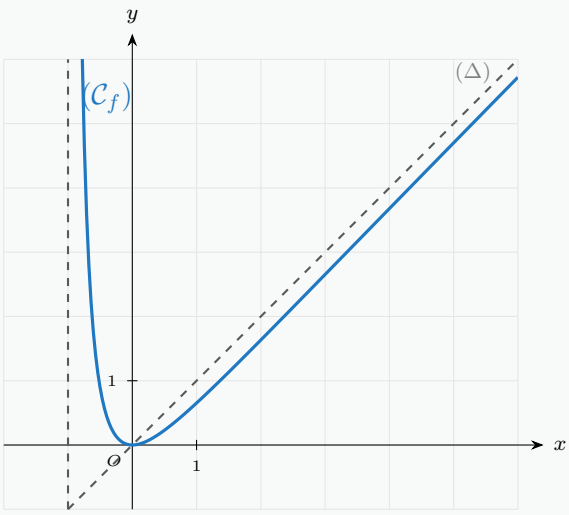
4 Voir la figure.

Partie 3.

1 $0 \le u_0 \le 1$. Si $0 \le u_n \le 1$: f est croissante sur $[0;1]$, donc $f(0) = 0 \le u_{n+1} \le f(1) = 1 - \frac{\ln 2}{2} \le 1$.

2 Sur $[0;1]$, $f(x) - x = -\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} \le 0$, donc $u_{n+1} \le u_n$.

3 Décroissante et minorée par 0 : convergente. f est continue sur $[0;1]$ et $f([0;1]) \subset [0;1]$, donc la limite $\ell \in [0;1]$ vérifie $f(\ell) = \ell$, soit $\ln(\ell+1) = 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.



Exercice 13

Partie 1 : On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$.

1. Calculer $g'(x)$, puis étudier les variations de la fonction g.
2. Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie 2 : Soit f la fonction numérique définie par : $f(0)=0$ et $f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ si $x>0$.

1. Montrer que f est continue à droite en 0.
2. a) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.
   b) Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
3. a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.
   b) Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.
4. a) Démontrer que pour tout x de $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$.
   b) Dresser le tableau de variations de f.
5. Donner l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $x_0=\frac{1}{e-1}$.
6. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie 3 : On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $0<u_0\leq\frac{1}{e-1}$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}) : 0<u_n\leq\frac{1}{e-1}$.
2. Démontrer que (u_n) est convergente, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

✔ Solution

Partie 1.

1. $g(x)=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}$, donc $g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x(x+1)-(x+1)^2+x}{x(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)^2}<0$.
   g est strictement décroissante ; $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0-0=0$.
2. g décroît strictement vers 0 : $g(x)>0$ pour tout $x>0$.

Partie 2.

1. $f(x)=x\ln(x+1)-x\ln x\xrightarrow[x\to0^+]{}0-0=0=f(0)$.
2. a) $\frac{f(x)}{x}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\xrightarrow[x\to0^+]{}+\infty$: f n'est pas dérivable à droite en 0.
   b) $(\mathcal{C}_f)$ admet en O une demi-tangente verticale.
3. a) Avec $t=\frac{1}{x}\to0^+$: $f(x)=\frac{\ln(1+t)}{t}\to1$.
   b) La droite $y=1$ est asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.
4. a) $f'(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\times\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}=g(x)$.
   b) $f'(x)>0$: f est strictement croissante de 0 à 1 sur $[0;+\infty[$.
5. $1+\frac{1}{x_0}=e$, donc $f(x_0)=x_0\ln e=x_0$ et $f'(x_0)=1-\frac{1}{1+x_0}=1-\frac{e-1}{e}=\frac{1}{e}$. Tangente :

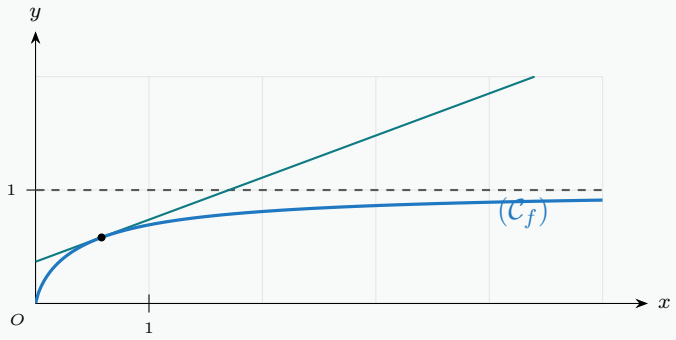
$$y = \frac{1}{e}(x - x_0) + x_0 = \frac{x}{e} + x_0\left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{x+1}{e}.$$

6 Voir la figure.

Partie 3.

1 $0 < u_0 \leq x_0$. Si $0 < u_n \leq x_0$: f strictement croissante donc $0 = f(0) < u_{n+1} \leq f(x_0) = x_0$.

2 Pour $0 < x \leq x_0$: $1 + \frac{1}{x} \geq e$, donc $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \geq 1$ et $f(x) \geq x$. La suite est croissante et majorée par x_0 : elle converge vers $\ell \in]0; x_0]$ ($\ell \geq u_0 > 0$). f est continue sur $]0; x_0]$, donc $f(\ell) = \ell$, soit $\ln\left(1 + \frac{1}{\ell}\right) = 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{e-1}$.



Exercice 14

Partie 1 : Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = x - \ln x$.

1 Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

2 Calculer $h'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de h.

3 En déduire que : $x - \ln x \geq 1$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

Partie 2 : On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x}{x - \ln x}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$, et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 Vérifier que la fonction f est bien définie sur $[0; +\infty[$ et donner une interprétation géométrique à ce résultat.

2 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire ?

3 Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.

4 Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5 a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f.

6 a) Vérifier que $f(x) - x = \dfrac{x(1 - h(x))}{h(x)}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

b) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ coupe la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$ en deux points dont on déterminera les coordonnées.

c) Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite $(\mathcal{D})$.

7 Donner l'équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.

8 Construire, dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la droite $(\mathcal{D})$ et la courbe $(\mathcal{C})$.

Partie 3 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \dfrac{1}{5}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 Montrer que la suite (u_n) est décroissante *(on pourra utiliser le résultat de la question II.6.c)*.

3 En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

✔ Solution

Partie 1.

1 $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$; $h(x) = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) \to +\infty$.

2 $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$: h décroît sur $]0;1]$, croît sur $[1;+\infty[$, $h(1) = 1$.

3 Le minimum de h est 1 : $x - \ln x \geq 1$.

Partie 2.

1 Pour $x > 0$, $x - \ln x \geq 1 > 0$: le dénominateur ne s'annule pas, f est définie sur $]0;+\infty[$ et en 0. Géométriquement : la courbe de $\ln$ est située au-dessous de la droite $y = x - 1$, donc ne coupe jamais la droite $y = x$.

2 $f(x) = \dfrac{1}{1 - \frac{\ln x}{x}} \to 1$: la droite $y = 1$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

3 f est continue sur $]0;+\infty[$ (quotient) ; en 0 : $h(x) \to +\infty$ donc $f(x) = \dfrac{x}{h(x)} \to 0 = f(0)$.

4 $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{h(x)} \to 0$: $f'_d(0) = 0$, demi-tangente horizontale en O.

5 a) $f'(x) = \dfrac{(x - \ln x) - x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln x)^2} = \dfrac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$.

b) Signe de $1 - \ln x$: f croît sur $[0;e]$, décroît sur $[e;+\infty[$; $f(e) = \dfrac{e}{e-1}$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{e}{e-1}$	↘	1

6 a) $f(x) - x = \dfrac{x}{h(x)} - x = \dfrac{x - xh(x)}{h(x)} = \dfrac{x\big(1 - h(x)\big)}{h(x)}$.

b) Pour $x > 0$: $f(x) = x \iff h(x) = 1 \iff x = 1$; et $f(0) = 0$. Points d'intersection : $O(0;0)$ et $A(1;1)$.

c) $1 - h(x) \leq 0$: $f(x) - x \leq 0$, donc $(\mathcal{C})$ est au-dessous de $(\mathcal{D})$ (contact en O et A).

7 $f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$: la tangente est $y = x$, c'est-à-dire $(\mathcal{D})$.

8 Voir la figure.

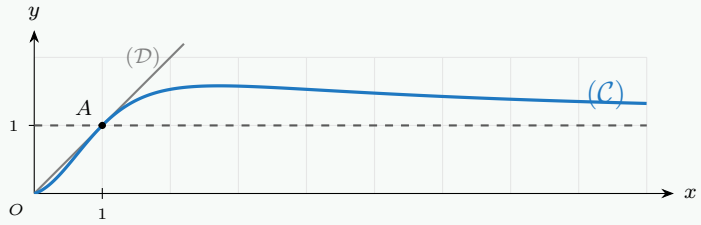
Partie 3.

1 $0 \leq u_0 \leq 1$. Si $0 \leq u_n \leq 1$: f croissante sur $[0;1]$, donc $0 = f(0) \leq u_{n+1} \leq f(1) = 1$.

2 D'après II.6.c), $f(u_n) \leq u_n$: la suite est décroissante.

3 Décroissante et minorée par 0 : convergente vers $\ell \in \left[0;\frac{1}{5}\right]$, avec $f(\ell) = \ell$ (f continue sur $[0;1]$, $f([0;1]) \subset [0;1]$), donc $\ell \in \{0;1\}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque : l'énoncé d'origine écrivait $x\big(x - h(x)\big)$ au numérateur en 6.a), ce qui est faux (pour $x = e$: $f(e) - e = \frac{e(2-e)}{e-1}$) ; il a été corrigé en $x\big(1 - h(x)\big)$.



Exercice 15 : Bac – Rattrapage 2018

Partie 1 : Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 1 - 2(\ln x)^2 + 2\ln x$. Le tableau suivant donne les variations de la fonction g sur $]0;+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
g	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

1. Calculer $g(1)$.
2. À partir du tableau de variations de g, déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0;1]$ et sur $[1;+\infty[$.

Partie 2 : On considère $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$ sur $]0;+\infty[$, et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a) Vérifier que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   b) Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
   c) Déterminer la position relative de la droite $(\mathcal{D})$ et de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat.
3. a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
   b) Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.
   c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
4. Construire dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la droite $(\mathcal{D})$ et la courbe $(\mathcal{C}_f)$ (unité : 1 cm).

Partie 3 : On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = f(x) - x$.

1. a) Vérifier que $h(1) = 0$.
   b) À l'aide de la courbe $(\mathcal{C}_h)$ donnée dans l'énoncé, déterminer le signe de $h(x)$ sur $]0;1]$ et sur $[1;+\infty[$, puis en déduire que $f(x) \leq x$ pour tout x de $[1;+\infty[$.
2. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   a) Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

✔ Solution

Partie 1.

1. $g(1) = 1 - 1 - 0 + 0 = 0$.
2. g est strictement croissante et $g(1) = 0$: $g(x) \leq 0$ sur $]0;1]$ et $g(x) \geq 0$ sur $[1;+\infty[$.

Partie 2.

1 a) $\dfrac{1}{2x^2} \to 0$ et $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$, donc $f(x) \to +\infty$.

b) $f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2x^2} + \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2 \to 0$.

c) Cette différence est strictement positive : $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathcal{D})$.

2 $\dfrac{1}{2x^2} \to +\infty$ et les autres termes sont minorés ($x - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$, carré ≥ 0) : $f(x) \to +\infty$; asymptote verticale $x = 0$.

3 a) $\left[\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right]' = 2 \cdot \dfrac{\ln x}{x} \cdot \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, donc $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{2\ln x - 2(\ln x)^2}{x^3} = \dfrac{x^3 - 1 - 2(\ln x)^2 + 2\ln x}{x^3} = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

b) $x^3 > 0$: f' a le signe de g (Partie 1).

c) $f(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1$:

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4 Voir la figure.

Partie 3.

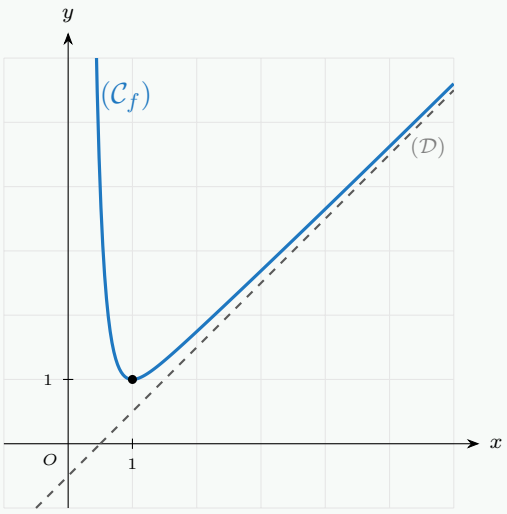
1 a) $h(1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 0$.

b) D'après la courbe : $h(x) \geq 0$ sur $]0;1]$ et $h(x) \leq 0$ sur $[1;+\infty[$; donc $f(x) - x \leq 0$ sur $[1;+\infty[$.

2 a) $1 \leq u_0 = e \leq e$. Si $1 \leq u_n \leq e$: f croissante sur $[1;e]$, donc $1 = f(1) \leq u_{n+1} \leq f(e) \leq e$ (car $f(e) \leq e$ d'après 1.b).

b) $u_n \geq 1$, donc $u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$.

c) Décroissante et minorée par 1 : convergente vers $\ell \in [1;e]$ avec $f(\ell) = \ell$, soit $h(\ell) = 0$. Or $h(x) < 0$ pour $x > 1$ (en effet $2x^2 h(x) = 1 - x^2 + 2(\ln x)^2$ est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$ et nulle en 1) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.



Exercice 16 : Bac – Normale 2017

Partie 1 : Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + x - 2 + 2\ln x$.

1 Vérifier que $g(1) = 0$.

2 À partir du tableau de variations de la fonction g ci-dessous, montrer que $g(x) \leq 0$ pour tout x de $]0;1]$ et que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $[1;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
g	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Partie 2 : On considère $f(x) = x + \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)\ln x$ sur $]0;+\infty[$, et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 1 cm).

1 Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat.

2 a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$.

3 a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

b) Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

4 a) Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation $\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)\ln x = 0$.

b) En déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ coupe la droite $(\mathcal{D})$ en deux points dont on déterminera les coordonnées.

c) Montrer que $f(x) \le x$ pour tout x de $[1;2]$, et en déduire la position relative de $(\mathcal{C})$ et de $(\mathcal{D})$ sur l'intervalle $[1;2]$.

5 Construire, dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite $(\mathcal{D})$ et la courbe $(\mathcal{C})$.

6 a) Montrer que $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

b) Montrer que la fonction $H : x \mapsto 2\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{2}{x} - 1$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

c) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln x\,dx = (1 - \ln 2)^2$.

d) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite $(\mathcal{D})$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Partie 3 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \sqrt{3}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1 Montrer par récurrence que $1 \le u_n \le 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3 En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

✔ Solution

Partie 1. $g(1) = 1 + 1 - 2 + 0 = 0$; g strictement croissante, d'où $g \le 0$ sur $]0;1]$ et $g \ge 0$ sur $[1;+\infty[$.

Partie 2.

1 $1 - \frac{2}{x} \to -\infty$ et $\ln x \to -\infty$: leur produit tend vers $+\infty$, donc $f(x) \to +\infty$; asymptote verticale $x = 0$.

2 a) $x \to +\infty$ et $\left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x \to +\infty$.

b) $\dfrac{f(x)}{x} = 1 + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\dfrac{\ln x}{x} \to 1$ et $f(x) - x = \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x \to +\infty$.

3 a) $f'(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2}\ln x + \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)\dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2 + 2\ln x + x - 2}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) f' a le signe de g (Partie 1).

c) $f(1) = 1$:

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4 a) $1 - \frac{2}{x} = 0 \iff x = 2$; $\ln x = 0 \iff x = 1$: $S = \{1; 2\}$.

b) $f(x) = x \iff \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x = 0$: points $(1; 1)$ et $(2; 2)$.

c) Pour $x \in [1; 2]$: $1 - \frac{2}{x} \leq 0$ et $\ln x \geq 0$, donc $f(x) - x \leq 0$: $(\mathcal{C})$ est au-dessous de $(\mathcal{D})$ sur $[1; 2]$.

5 Voir la figure.

6 a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^2 = \frac{(\ln 2)^2}{2}$.

b) $H'(x) = \dfrac{2}{x} - 1 = h(x)$.

c) Par parties ($u = \ln x$, $v' = h$, $v = H$) :

$$\int_1^2 h(x)\ln x\,dx = \big[H(x)\ln x\big]_1^2 - \int_1^2 \frac{2\ln x - x}{x}dx = (2\ln 2 - 2)\ln 2 - \big[(\ln 2)^2 - 1\big]$$

$$= (\ln 2)^2 - 2\ln 2 + 1 = (1 - \ln 2)^2.$$

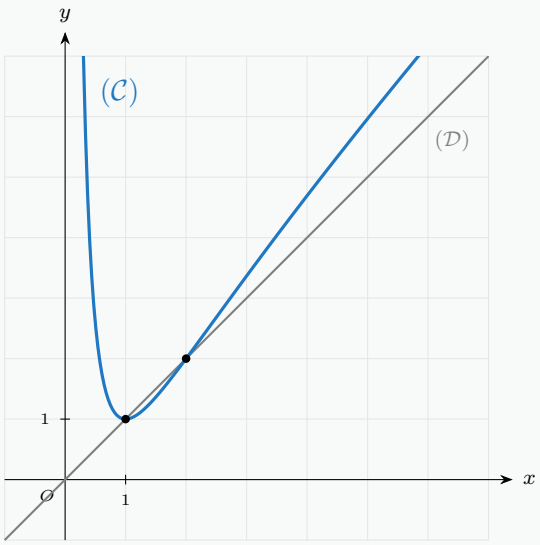
d) Sur $[1; 2]$, $(\mathcal{D})$ est au-dessus de $(\mathcal{C})$: $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^2 \big(x - f(x)\big)dx = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln x\,dx = (1 - \ln 2)^2$ cm^2 $\approx 0{,}094$ cm^2.

Partie 3.

1 $1 \leq \sqrt{3} \leq 2$. Si $1 \leq u_n \leq 2$: f croissante sur $[1; 2]$ donc $1 = f(1) \leq u_{n+1} \leq f(2) = 2$.

2 D'après II.4.c) : $u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$.

3 Décroissante et minorée par 1 : convergente vers $\ell \in [1; \sqrt{3}]$ avec $f(\ell) = \ell$, donc $\ell \in \{1; 2\}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.



Exercice 17 : Bac – Rattrapage 2016

Partie 1 : Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{2}{x}-1+2\ln x$. Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction g sur $]0;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	↘	$g(1)$	↗	$+\infty$

Calculer $g(1)$, puis en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie 2 : On considère $f(x)=3-3x+2(x+1)\ln x$ sur $]0;+\infty[$, et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 2 cm).

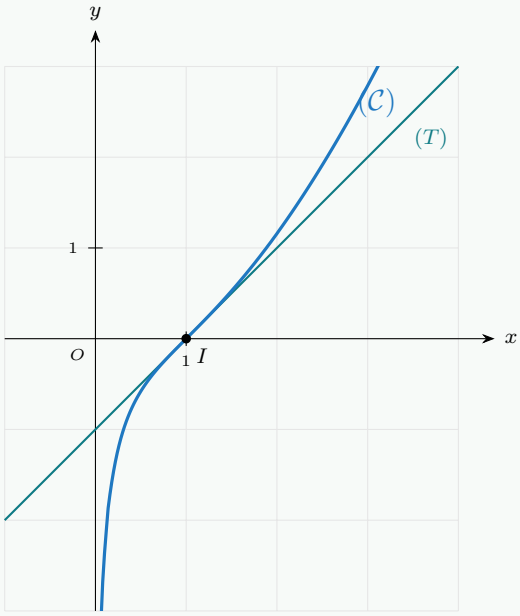
1. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ et donner une interprétation géométrique à ce résultat.
2. a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
   b) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont la direction est celle de l'axe des ordonnées.
3. a) Montrer que $f'(x)=g(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.
   b) En déduire que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de f.
4. a) Montrer que $I(1;0)$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$.
   b) Montrer que $y=x-1$ est une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point I.
   c) Construire, dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (T) et la courbe $(\mathcal{C})$.
5. Résoudre graphiquement l'inéquation : $(x+1)\ln x\geq\dfrac{3}{2}(x-1)$.

✔ Solution

Partie 1. $g(1)=2-1+0=1$; c'est le minimum de g : $g(x)\geq 1>0$ sur $]0;+\infty[$.

Partie 2.

1. $(x+1)\ln x\to 1\times(-\infty)=-\infty$: $f(x)\to-\infty$; asymptote verticale $x=0$.
2. a) $f(x)=x\left[\frac{3}{x}-3+2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right]$ et le crochet tend vers $+\infty$.
   b) $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{3}{x}-3+2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln x\to+\infty$: branche parabolique de direction (Oy).
3. a) $f'(x)=-3+2\ln x+\dfrac{2(x+1)}{x}=-3+2\ln x+2+\dfrac{2}{x}=g(x)$.
   b) $f'(x)=g(x)>0$: f strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$; $f(1)=0$.
4. a) $f''(x)=g'(x)=-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x-1)}{x^2}$ s'annule en 1 en changeant de signe, et $f(1)=0$: $I(1;0)$ est un point d'inflexion.
   b) $f'(1)=g(1)=1$: $(T):y=x-1$.
   c) Voir la figure.
5. $(x+1)\ln x\geq\dfrac{3}{2}(x-1)\iff 3-3x+2(x+1)\ln x\geq 0\iff f(x)\geq 0$: $(\mathcal{C})$ est au-dessus de l'axe des abscisses pour $x\geq 1$. $S=[1;+\infty[$.



Exercices complémentaires (extraits du baccalauréat)

Exercice 18 : Rattrapage 2022

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=x^4(\ln x-1)^2$ si $x>0$ et $f(0)=0$, et (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 1 cm).

1 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

2 a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter le résultat géométriquement.

3 a) Montrer que $f'(x)=2x^3(\ln x-1)(2\ln x-1)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

4 a) Sachant que $f''(x)=2x^2(6\ln x-5)\ln x$ pour tout x de $]0;+\infty[$, étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0;+\infty[$.

b) Déduire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses.

5 a) Construire (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (on prend $\sqrt{e}\approx 1{,}6$ et $e^2\approx 7{,}2$).

b) En utilisant la courbe (C), déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2(\ln x-1)=-1$.

6 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(|x|)$.

a) Montrer que la fonction g est paire.

b) Construire (C_g), la courbe représentative de g, dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

✔ **Solution**

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\dfrac{f(x)}{x}=x^3(\ln x-1)^2\to+\infty$: branche parabolique de direction (Oy).

2 a) $f(x)=\left(x^2\ln x-x^2\right)^2\to(0-0)^2=0=f(0)$.

b) $\dfrac{f(x)}{x}=x\left(x\ln x-x\right)^2\to 0$: $f'_d(0)=0$, demi-tangente horizontale en O.

3 a) $f'(x)=4x^3(\ln x-1)^2+x^4\cdot 2(\ln x-1)\cdot\dfrac{1}{x}=2x^3(\ln x-1)\left[2(\ln x-1)+1\right]=2x^3(\ln x-1)(2\ln x-1)$.

b) f' s'annule en $\sqrt{e}$ et e ; $f(\sqrt{e})=e^2\left(\frac{1}{2}-1\right)^2=\dfrac{e^2}{4}$, $f(e)=0$.

x	0		$\sqrt{e}$		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e^2}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4 a) f'' a le signe de $(6\ln x - 5)\ln x$: positif sur $]0;1[$, négatif sur $\left]1;e^{\frac{5}{6}}\right[$, positif sur $\left]e^{\frac{5}{6}};+\infty\right[$.

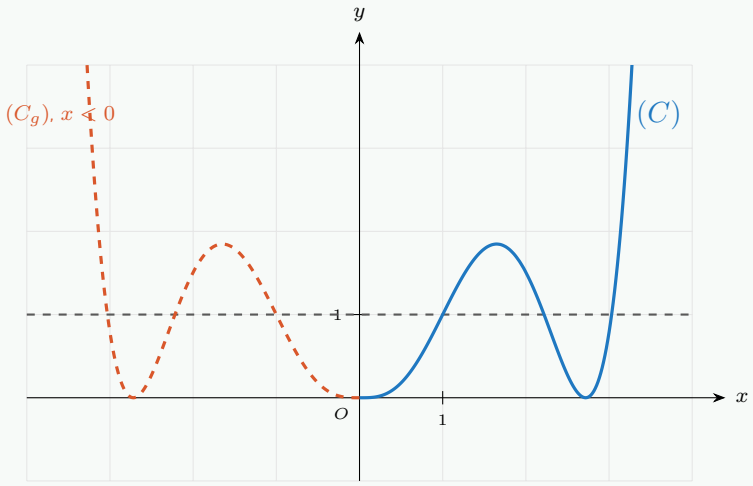
b) f'' s'annule en changeant de signe en 1 et en $e^{\frac{5}{6}}$: deux points d'inflexion d'abscisses 1 et $e^{\frac{5}{6}}$.

5 a) Voir la figure.

b) $x^2(\ln x - 1) = -1 \iff \begin{cases} f(x) = 1 \\ \ln x - 1 < 0 \end{cases}$, c'est-à-dire $f(x) = 1$ avec $0 < x < e$. La droite $y = 1$ coupe (C) en deux points d'abscisses dans $]0;e[$ (car $\frac{e^2}{4} \approx 1{,}85 > 1$) : **deux solutions**.

6 a) $\mathbb{R}$ est symétrique et $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$.

b) (C_g) est la réunion de (C) et de sa symétrique par rapport à (Oy).



Exercice 19 : Normale 2021

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = 2x\ln x - 2x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$, et (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 1 cm).

1 Montrer que f est continue à droite au point 0.

2 a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

3 a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

4 a) Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = x$.

b) Construire la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (on prend : $e^{\frac{3}{2}} \approx 4{,}5$).

5 a) Déterminer le minimum de f sur $]0;+\infty[$.

b) En déduire que pour tout x de $]0;+\infty[$: $\ln x \geq \dfrac{x-1}{x}$.

6 Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1;+\infty[$.

a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b) Construire dans le même repère la courbe représentative de la fonction g^{-1}.

7 On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x^3 + 3x$ si $x \leq 0$ et $h(x) = 2x\ln x - 2x$ si $x > 0$.

a) Étudier la continuité de la fonction h au point 0.

b) Étudier la dérivabilité de la fonction h à gauche au point 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

c) La fonction h est-elle dérivable au point 0 ? Justifier.

✔ **Solution**

1 $f(x) = 2x\ln x - 2x \to 0 - 0 = 0 = f(0)$.

2 a) $f(x) = 2x(\ln x - 1) \to +\infty$.

b) $\dfrac{f(x)}{x} = 2\ln x - 2 \to +\infty$: branche parabolique de direction (Oy).

3 a) $\dfrac{f(x)}{x} = 2\ln x - 2 \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$: f n'est pas dérivable à droite en 0 ; demi-tangente verticale en O.

b) $f'(x) = 2\ln x + 2 - 2 = 2\ln x$.

c) $f(1) = -2$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

4 a) $f(x) = 0 \iff 2x(\ln x - 1) = 0 \iff x = e$; $\quad f(x) = x \iff 2\ln x - 2 = 1 \iff x = e^{\frac{3}{2}}$.

b) Voir la figure.

5 a) Le minimum de f sur $]0;+\infty[$ est $f(1) = -2$.

b) $2x\ln x - 2x \geq -2 \iff x\ln x \geq x - 1 \iff \ln x \geq \dfrac{x-1}{x}$ (division par $x > 0$).

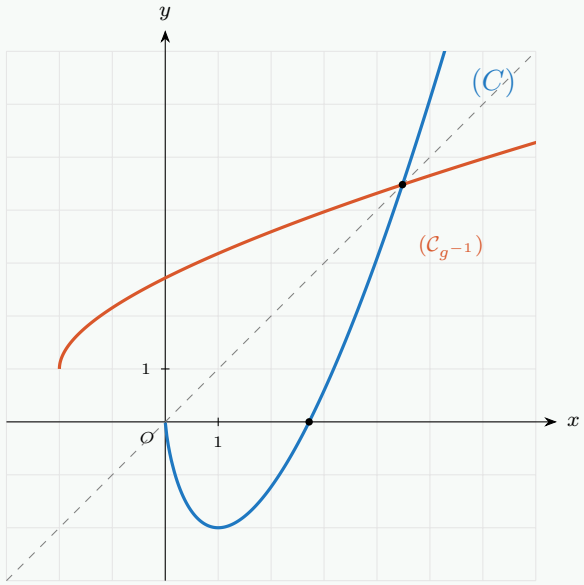
6 a) g est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$: $J = g([1;+\infty[) = [-2;+\infty[$.

b) $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ est la symétrique de $(\mathcal{C}_g)$ par rapport à la droite $y = x$ (figure).

7 a) $h(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 0$: h est continue en 0.

b) $\dfrac{h(x)}{x} = x^2 + 3 \xrightarrow[x\to 0^-]{} 3$: $h'_g(0) = 3$; demi-tangente à gauche $y = 3x$ $(x \leq 0)$.

c) $\dfrac{h(x)}{x} = 2\ln x - 2 \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$: h n'est pas dérivable à droite en 0, donc pas dérivable en 0.



Exercice 20 : Normale 2020

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$.

1 a) Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$: $g'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$.

b) Montrer que g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

c) En déduire que pour tout x de $[1;+\infty[$: $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$ *(remarquer que $2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$)*.

d) Montrer que pour tout x de $[1;+\infty[$: $0 \leq \dfrac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \dfrac{8}{\sqrt{x}}$, puis déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$.

2 Montrer que la fonction $G : x \mapsto x\left(-1 + \dfrac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x\right)$ est une fonction primitive de g sur $]0;+\infty[$.

✔ Solution

1 a) $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$.

b) Pour $x > 1$: $\sqrt{x} > 1$, donc $g'(x) > 0$.

c) $g(1) = 0$ et g croissante : $g(x) \geq 0$, soit $\ln x \leq 2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$; et $\ln x \geq 0$ pour $x \geq 1$.

d) En élevant au cube (fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$) : $0 \leq (\ln x)^3 \leq 8x\sqrt{x}$, puis en divisant par x^2 : $0 \leq \dfrac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \dfrac{8}{\sqrt{x}}$. Par encadrement, la limite vaut 0.

2 $G(x) = -x + \dfrac{4}{3}x\sqrt{x} - x\ln x$, donc $G'(x) = -1 + 2\sqrt{x} - \ln x - 1 = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x = g(x)$.

Exercice 21 : Normale 2019

Première partie : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + \dfrac{1}{2} - \ln x + \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$, et (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 1 cm).

1 Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

2 a) Vérifier que pour tout x de $]0;+\infty[$: $f(x) = x + \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x$.

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c) Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$: $\dfrac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$, puis en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$.

d) Montrer que (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite (Δ) d'équation $y = x$.

3 a) Vérifier que pour tout x de $]0;1]$: $(x-1)+\ln x \leq 0$, et que pour tout x de $[1;+\infty[$: $(x-1)+\ln x \geq 0$.

b) Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{x-1+\ln x}{x}$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4 a) Montrer que $f''(x) = \dfrac{2-\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

b) En déduire que (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

5 a) Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$: $f(x)-x = \dfrac{1}{2}(\ln x-1)^2$, et déduire la position relative de (C) et (Δ).

b) Construire (Δ) et (C) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Deuxième partie : Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1 a) Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2 Calculer la limite de la suite (u_n).

✔ Solution

Première partie.

1 $f(x) = x + \dfrac{1}{2} + \ln x\left(\dfrac{1}{2}\ln x - 1\right)$ et $\ln x\left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right) \to (-\infty)(-\infty) = +\infty$: $f(x) \to +\infty$; asymptote verticale $x = 0$.

2 a) $\left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x = \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x$.

b) $x \to +\infty$ et $\left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x \to +\infty$.

c) $\ln x = 2\ln\sqrt{x}$ et $x = (\sqrt{x})^2$, d'où l'égalité ; avec $t = \sqrt{x} \to +\infty$, $\dfrac{\ln t}{t} \to 0$, donc $\dfrac{(\ln x)^2}{x} \to 0$.

d) $\dfrac{f(x)}{x} = 1 + \dfrac{1}{2x} - \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(\ln x)^2}{x} \to 1$ et $f(x)-x = \frac{1}{2}(\ln x-1)^2 \to +\infty$ (voir 5.a).

3 a) $k(x) = x-1+\ln x$ est strictement croissante et $k(1) = 0$.

b) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{x-1+\ln x}{x}$.

c) $f(1) = \frac{3}{2}$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

4 a) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$, donc $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1-\ln x}{x^2} = \dfrac{2-\ln x}{x^2}$.

b) f'' s'annule en changeant de signe en e^2 : point d'inflexion $\left(e^2; e^2+\frac{1}{2}\right)$ (car $f(e^2) = e^2 + \frac{1}{2} - 2 + 2$).

5 a) $f(x)-x = \frac{1}{2}\left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 1\right] = \frac{1}{2}(\ln x-1)^2 \geq 0$: (C) est au-dessus de (Δ), et la touche au point $(e;e)$.

b) Voir la figure.

Deuxième partie.

1 a) $1 \leq u_0 \leq e$. Si $1 \leq u_n \leq e$: f croissante sur $[1;e]$, donc $1 \leq \frac{3}{2} = f(1) \leq u_{n+1} \leq f(e) = e$.

b) $f(x) \geq x$ (5.a) : $u_{n+1} \geq u_n$.

c) Croissante et majorée par e : convergente.

2 La limite $\ell \in [1;e]$ vérifie $f(\ell) = \ell$ (f continue sur $[1;e]$, $f([1;e]) \subset [1;e]$), soit $(\ln \ell - 1)^2 = 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

