CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 11

2BAC PC & SVT

Géométrie dans l'espace

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Dans tous ces exercices, l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Rappels : $d\big(M;(\mathcal{P})\big)=\dfrac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ pour $(\mathcal{P}):ax+by+cz+d=0$; $d\big(M;(D)\big)=\dfrac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ pour $(D)=D(A;\vec{u})$.

Exercice 1

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point $A(2;-2;1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point I, milieu du segment $[AB]$ où $A(2;5;-1)$ et $B(0;-3;1)$, et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1;0;2)$.
3. Soit (D) la droite de représentation paramétrique : $\{x=3+t\ ;\ y=-1-t\ ;\ z=2+2t\quad (t\in\mathbb{R})$. Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de (D) et deux points de cette droite.

Solution

1. $(D):\{x=2+3t\ ;\ y=-2-2t\ ;\ z=1+t\quad (t\in\mathbb{R})$.
2. $I(1;1;0):(D):\{x=1+t\ ;\ y=1\ ;\ z=2t\quad (t\in\mathbb{R})$.
3. $\vec{u}(1;-1;2)$; pour $t=0:(3;-1;2)\in(D)$; pour $t=1:(4;-2;4)\in(D)$.

Exercice 2

1. On considère les vecteurs $\vec{u}(-1;2;7)$ et $\vec{v}=2\vec{i}+m\vec{j}+3\vec{k}$, où $m\in\mathbb{R}$. Déterminer m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient perpendiculaires.
2. On considère les points $A(1;0;1)$, $B(0;-1;1)$ et $C(0;1;1)$. a) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. b) Que peut-on conclure ?

Solution

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2+2m+21=2m+19=0\iff m=-\dfrac{19}{2}$.
2. a) $\overrightarrow{AB}(-1;-1;0)$, $\overrightarrow{AC}(-1;1;0)$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1-1+0=0$. b) $(AB)\perp(AC)$: le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et les deux normes $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$:
a) $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$; $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}$ b) $\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\sqrt{3}\vec{k}$; $\vec{v}(-3;1;0)$ c) $\vec{u}(2;1;0)$; $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ d) $\vec{u}(-1;1;1)$; $\vec{v}(2;4;-2)$

Solution

	$\vec{u}\cdot\vec{v}$	$\|\vec{u}\|$	$\|\vec{v}\|$
a)	$1+2+0=3$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{5}$
b)	$-9-2+0=-11$	$\sqrt{9+4+12}=5$	$\sqrt{10}$
c)	$2-2+0=0$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{14}$
d)	$-2+4-2=0$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

Dans les cas c) et d), les vecteurs sont orthogonaux.

Exercice 4

1. Soit $(\mathcal{P}) : 2x + y - z + 1 = 0$. Les points $A(0;2;3)$ et $B(1;1;-1)$ appartiennent-ils au plan $(\mathcal{P})$?
2. Soient $(\mathcal{P}) : x + 2y - z + 1 = 0$ et $(D) : \{x = 1 + t \ ; \ y = 2 + 2t \ ; \ z = -1 - t \quad (t \in \mathbb{R})$. Étudier l'intersection de $(\mathcal{P})$ et (D).

Solution

1. $2 \times 0 + 2 - 3 + 1 = 0 : A \in (\mathcal{P})$; $\quad 2 + 1 + 1 + 1 = 5 \neq 0 : B \notin (\mathcal{P})$.
2. $(1 + t) + 2(2 + 2t) - (-1 - t) + 1 = 6t + 7 = 0 \iff t = -\dfrac{7}{6}$: (D) coupe $(\mathcal{P})$ en un seul point $\left(-\dfrac{1}{6}; -\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{6}\right)$.

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, montrer que les deux droites (D) et (D') sont orthogonales.

1. (D) dirigée par $\vec{u}(1;3;-2)$ et $(D') : \{x = 3 + t \ ; \ y = 4 + t \ ; \ z = -1 + 2t \quad (t \in \mathbb{R})$.
2. $(D) : x - 2 = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{5 - z}{2}$, et $(D') : \{x = 3 + 2t \ ; \ y = 5 - 3t \ ; \ z = -2 - 2t \quad (t \in \mathbb{R})$.

Solution

1. $\vec{u}'(1;1;2)$ dirige (D') et $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 1 + 3 - 4 = 0$.
2. En posant $x - 2 = \frac{y-1}{2} = \frac{5-z}{2} = t : (D) : \{x = 2 + t \ ; \ y = 1 + 2t \ ; \ z = 5 - 2t$, dirigée par $\vec{u}(1;2;-2)$; $\vec{u}'(2;-3;-2)$ et $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 2 - 6 + 4 = 0$.

Dans les deux cas les vecteurs directeurs sont orthogonaux, donc $(D) \perp (D')$.

Exercice 6

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P}')$ passant par $A'(1;2;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}'(-2;3;1)$.
2. Soit $(\mathcal{P}) : 2x + 3y - z + 4 = 0$. a) Déterminer un point A de $(\mathcal{P})$. b) Vérifier que $B(1;0;1) \notin (\mathcal{P})$. c) Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal à $(\mathcal{P})$. d) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par B et orthogonale à $(\mathcal{P})$. e) En déduire le projeté orthogonal H de B sur $(\mathcal{P})$.

Solution

1. $-2(x - 1) + 3(y - 2) + (z + 1) = 0$, soit $(\mathcal{P}') : -2x + 3y + z - 3 = 0$.
2. a) Pour $x = y = 0 : z = 4$, donc $A(0;0;4) \in (\mathcal{P})$. b) $2 + 0 - 1 + 4 = 5 \neq 0$. c) $\vec{n}(2;3;-1)$.
   d) $(D) : \{x = 1 + 2t \ ; \ y = 3t \ ; \ z = 1 - t \quad (t \in \mathbb{R})$.
   e) $2(1 + 2t) + 9t - (1 - t) + 4 = 14t + 5 = 0 \iff t = -\dfrac{5}{14}$: $H\left(\dfrac{2}{7}; -\dfrac{15}{14}; \dfrac{19}{14}\right)$.

Exercice 7

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par $A(1;2;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1;0;-4)$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par $B(-2;1;-1)$ et orthogonal à la droite $(D) : \{x = 1 - 3t \ ; \ y = 2 + 2t \ ; \ z = -1 - 3t \quad (t \in \mathbb{R})$.

✔ Solution

1. $(x-1)-4(z+1)=0$: $(\mathcal{P}) : x-4z-5=0$.
2. $\vec{u}(-3;2;-3)$ dirige (D), donc est normal à $(\mathcal{P}) : -3(x+2)+2(y-1)-3(z+1)=0$, soit $(\mathcal{P}) : 3x-2y+3z+11=0$.

Exercice 8

1. Soient $(\mathcal{P}) : 2x+2y-z+1=0$, $A(1;1;2)$ et $B(-1;1;1)$. Calculer $d\big(A;(\mathcal{P})\big)$ et $d\big(B;(\mathcal{P})\big)$.
2. Calculer la distance du point $E(0;1;-1)$ au plan $(\mathcal{P})$ passant par $F(3;1;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1;2;-2)$.

✔ Solution

1. $d\big(A;(\mathcal{P})\big)=\dfrac{|2+2-2+1|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{3}{3}=1$; $\quad d\big(B;(\mathcal{P})\big)=\dfrac{|-2+2-1+1|}{3}=0$ (donc $B\in(\mathcal{P})$).
2. $(\mathcal{P}) : (x-3)+2(y-1)-2(z-1)=0$, soit $x+2y-2z-3=0$; $\quad d\big(E;(\mathcal{P})\big)=\dfrac{|0+2+2-3|}{3}=\dfrac{1}{3}$.

Exercice 9

Soient $(\mathcal{P}) : x+y+z+1=0$ et $A(1;2;0)$. 1. Calculer $d\big(A;(\mathcal{P})\big)$. 2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et orthogonale à $(\mathcal{P})$. 3. En déduire le projeté orthogonal H de A sur $(\mathcal{P})$.

✔ Solution

1. $d\big(A;(\mathcal{P})\big)=\dfrac{|1+2+0+1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. 2. $(D) : \{x=1+t\ ;\ y=2+t\ ;\ z=t\quad (t\in\mathbb{R})$.
3. $(1+t)+(2+t)+t+1=3t+4=0 \iff t=-\dfrac{4}{3}$: $H\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$ (on vérifie $AH=\frac{4}{3}\sqrt{3}$).

Exercice 10

Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) : 1. de centre $\Omega(1;2;0)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$; 2. de centre $\Omega(1;-1;2)$ passant par $A(1;4;5)$; 3. de diamètre $[AB]$, où $A(-1;0;3)$ et $B(2;5;4)$.

✔ Solution

1. $(S) : (x-1)^2+(y-2)^2+z^2=3$.
2. $R^2=\Omega A^2=0+25+9=34$: $(S) : (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=34$.
3. Centre $I\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$ (milieu de $[AB]$), $AB^2=9+25+1=35$, $R^2=\frac{35}{4}$: $(S) : \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2+\left(z-\frac{7}{2}\right)^2=\dfrac{35}{4}$.
   (Autre méthode : $M\in(S) \iff \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.)

Exercice 11

Déterminer l'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant (E) :
1. $x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+10=0$; 2. $x^2+y^2+z^2+2x+4z+5=0$; 3. $x^2+y^2+z^2-2y+3=0$; 4. $x^2+y^2+z^2-4x-6z+10=0$; 5. $x^2+y^2+z^2+4y-2z+5=0$; 6. $x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+19=0$.

✔ Solution

On met sous la forme $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=k$:

1. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=1$: sphère de centre $(1;1;3)$ et de rayon 1.

2 $(x+1)^2+y^2+(z+2)^2=0$: le point $(-1;0;-2)$.

3 $x^2+(y-1)^2+z^2=-2<0$: ensemble vide.

4 $(x-2)^2+y^2+(z-3)^2=3$: sphère de centre $(2;0;3)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

5 $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=0$: le point $(0;-2;1)$.

6 $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=-13<0$: ensemble vide.

Exercice 12

On considère (S) : $x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-1=0$. 1. Montrer que (S) est une sphère (centre et rayon). 2. Étudier la position relative de (S) et du plan $(\mathcal{P})$: a) $(\mathcal{P})$: $2x+y+2z-3=0$; b) $(\mathcal{P})$: $x-2y+2z+3=0$; c) $(\mathcal{P})$: $x+2y-z+9=0$.

Solution

1. $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$: sphère de centre $\Omega(-1;1;-1)$ et de rayon $R=2$.

a) $d=\dfrac{|-2+1-2-3|}{3}=2=R$: $(\mathcal{P})$ est tangent à (S), au point $\Omega+\frac{2}{3}(2;1;2)=\left(\frac{1}{3};\frac{5}{3};\frac{1}{3}\right)$.

b) $d=\dfrac{|-1-2-2+3|}{3}=\dfrac{2}{3}<R$: $(\mathcal{P})$ coupe (S) suivant un cercle de rayon $r=\sqrt{4-\frac{4}{9}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$, de centre $\left(-\frac{7}{9};\frac{5}{9};-\frac{5}{9}\right)$.

c) $d=\dfrac{|-1+2+1+9|}{\sqrt{6}}=\dfrac{11}{\sqrt{6}}\approx 4{,}5>R$: $(\mathcal{P})$ et (S) sont disjoints.

Exercice 13

Soient (S) : $x^2+y^2+z^2-x-\dfrac{1}{4}=0$ et $(\mathcal{P})$: $y+z-1=0$. 1. Déterminer le centre et le rayon de (S). 2. Montrer que $(\mathcal{P})$ est tangent à (S). 3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par Ω et orthogonale à $(\mathcal{P})$. 4. En déduire le point de contact H de (S) et $(\mathcal{P})$.

Solution

1. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$: $\Omega\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ et $R=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $d(\Omega;(\mathcal{P}))=\dfrac{|0+0-1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=R$: $(\mathcal{P})$ est tangent à (S).

3. $\vec{n}(0;1;1)$: (D) : $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=t\\ z=t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. 4. $2t-1=0 \iff t=\frac{1}{2}$: $H\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 14

Soit (S) : $x^2+y^2+z^2-6y-4z+9=0$. 1. Déterminer le centre et le rayon de (S). 2. Vérifier que $A\left(-\sqrt{2};2;3\right)\in(S)$. 3. Déterminer une équation du plan $(\mathcal{P})$ tangent à (S) en A.

Solution

1. $x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=4$: $\Omega(0;3;2)$, $R=2$. 2. $(-\sqrt{2})^2+(2-3)^2+(3-2)^2=2+1+1=4$: $A\in(S)$.

3. $\overrightarrow{\Omega A}\left(-\sqrt{2};-1;1\right)$ est normal à $(\mathcal{P})$: $-\sqrt{2}(x+\sqrt{2})-(y-2)+(z-3)=0$, soit $(\mathcal{P})$: $\sqrt{2}\,x+y-z+3=0$.

Exercice 15

Soient $(\mathcal{P})$: $x-y+z=0$ et (Q) : $2x+3y+z-6=0$, (S) la sphère de centre $\Omega(1;2;4)$ tangente à $(\mathcal{P})$, et (D) la droite passant par Ω et orthogonale à (Q). 1. Montrer que $(\mathcal{P})\perp(Q)$. 2. Déterminer le rayon R de (S). 3. En déduire une équation de (S). 4. Déterminer le point d'intersection de $(\mathcal{P})$ et (S). 5. Déterminer le point d'intersection de (D) et (Q). 6. Montrer que (Q) coupe (S) selon un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

✔ Solution

1. $\vec{n}(1;-1;1)$, $\vec{n'}(2;3;1)$: $\vec{n}\cdot\vec{n'} = 2-3+1 = 0$, donc $(\mathcal{P}) \perp (Q)$.
2. $R = d\big(\Omega;(\mathcal{P})\big) = \dfrac{|1-2+4|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. 3. $(S) : (x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2 = 3$.
4. Le point de contact est le projeté de Ω sur $(\mathcal{P})$: $(1+t;2-t;4+t)$ avec $3t+3=0$, $t=-1$: le point $(0;3;3)$.
5. $(D) : \{x = 1+2t\ ;\ y = 2+3t\ ;\ z = 4+t$; $2(1+2t)+3(2+3t)+(4+t)-6 = 14t+6 = 0 \iff t = -\frac{3}{7}$: $H\left(\frac{1}{7};\frac{5}{7};\frac{25}{7}\right)$.
6. $d\big(\Omega;(Q)\big) = \dfrac{|2+6+4-6|}{\sqrt{14}} = \dfrac{6}{\sqrt{14}}$ et $\dfrac{36}{14} = \dfrac{18}{7} < 3 = R^2$: (Q) coupe (S) selon le cercle de centre $H\left(\frac{1}{7};\frac{5}{7};\frac{25}{7}\right)$ et de rayon $r = \sqrt{3-\frac{18}{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Exercice 16

Soient $(S) : x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z+8=0$, $(\mathcal{P}) : 3x+5y+z-7=0$, et (D) la droite passant par $A(2;3;-3)$ et dirigée par $\vec{u} = \vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$. 1. Déterminer le centre et le rayon de (S). 2. Déterminer une représentation paramétrique de (D). 3. Montrer que (D) coupe (S) en deux points à déterminer. 4. Montrer que (D) est parallèle à $(\mathcal{P})$.

✔ Solution

1. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2 = 6$: $\Omega(2;1;-3)$, $R = \sqrt{6}$.
2. $(D) : \{x = 2+t\ ;\ y = 3-t\ ;\ z = -3+2t \quad (t\in\mathbb{R})$.
3. $t^2+(2-t)^2+(2t)^2 = 6 \iff 6t^2-4t-2=0 \iff 3t^2-2t-1=0 \iff t=1$ ou $t=-\frac{1}{3}$. Points d'intersection : $(3;2;-1)$ et $\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{10}{3};-\dfrac{11}{3}\right)$.
4. $\vec{n}(3;5;1)$: $\vec{u}\cdot\vec{n} = 3-5+2 = 0$, donc $(D) \parallel (\mathcal{P})$; de plus $A \notin (\mathcal{P})$ $(6+15-3-7 = 11 \neq 0)$: (D) est strictement parallèle à $(\mathcal{P})$.

Remarque : l'énoncé d'origine donnait $(\mathcal{P}) : 3x+5y+2z-7=0$; alors $\vec{u}\cdot\vec{n} = 2 \neq 0$ et (D) n'est pas parallèle à $(\mathcal{P})$. La série a été corrigée en $3x+5y+z-7=0$.

Exercice 17

Calculer la distance du point $M(3;2;1)$ à la droite (D) puis déterminer le projeté orthogonal H de M sur (D) : 1. $(D) : \{x = 1+t\ ;\ y = 1\ ;\ z = -t \quad (t\in\mathbb{R})$; 2. $(D) : x = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{2}$; 3. $(D) : \begin{cases} x-y=1 \\ y+z=2 \end{cases}$.

✔ Solution

Dans chaque cas, $H = A+t\vec{u}$ avec $\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u} = 0$, et $d\big(M;(D)\big) = MH$.

1. $A(1;1;0)$, $\vec{u}(1;0;-1)$; $\overrightarrow{MH}(t-2;-1;-t-1)$ et $\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u} = 2t-1 = 0$: $t=\frac{1}{2}$, $H\left(\frac{3}{2};1;-\frac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{MH}\left(-\frac{3}{2};-1;-\frac{3}{2}\right)$: $d = \sqrt{\frac{9}{4}+1+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{11}{2}} = \dfrac{\sqrt{22}}{2}$. (Avec le produit vectoriel : $\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u} = (-1;3;-1)$, $d = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$.)
2. $(D) : \{x = t\ ;\ y = 1+2t\ ;\ z = -1+2t$, $\vec{u}(1;2;2)$; $\overrightarrow{MH}(t-3;2t-1;2t-2)$, $\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u} = 9t-9 = 0$: $t=1$, $H(1;3;1)$; $\overrightarrow{MH}(-2;1;0)$: $d = \sqrt{5}$.

3 En posant $y = t$: (D) : $\{x = 1 + t\ ;\ y = t\ ;\ z = 2 - t$, $\vec{u}(1;1;-1)$; $\overrightarrow{MH}(t-2;t-2;1-t)$, $\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u} = 3t - 5 = 0 : t = \frac{5}{3}$,
$H\left(\frac{8}{3};\frac{5}{3};\frac{1}{3}\right)$; $\overrightarrow{MH}\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right) : d = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Exercice 18

On considère $A(1;2;1)$, $B(1;3;1)$, $C(1;0;1)$ et (S) la sphère de centre $\Omega(-3;0;1)$ et de rayon $R = 2\sqrt{2}$.

1 a) Montrer que $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB} = -\vec{i} + \vec{k}$. b) Vérifier que $x - z = 0$ est une équation du plan (OAB).

2 a) Calculer la distance de Ω au plan (OAB). b) Que peut-on conclure ?

3 Déterminer une équation cartésienne de (S).

4 Soit (D) la droite passant par Ω et orthogonale à (OAB). a) Montrer que $\{x = -3 - t\ ;\ y = 0\ ;\ z = 1 + t\ \ (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de (D). b) Déterminer le point H d'intersection de (S) et (OAB). c) Montrer que la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}(2;0;-2)$ est tangente à (S).

✔ Solution

1 a) $\overrightarrow{OA}(1;2;1)$, $\overrightarrow{OB}(1;3;1) : \overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB} = (2-3\ ;\ 1-1\ ;\ 3-2) = (-1;0;1)$.
b) Le plan (OAB) a pour vecteur normal $(-1;0;1)$ et passe par $O : -x + z = 0$, soit $x - z = 0$.

2 a) $d = \frac{|-3-1|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. b) $d = R$: le plan (OAB) est tangent à (S).

3 $(S) : (x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 8$, soit $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2z + 2 = 0$.

4 a) (D) passe par Ω $(t = 0)$ et est dirigée par $(-1;0;1)$, normal à (OAB).
b) $H \in (D)\cap(OAB) : -3 - t = 1 + t \iff t = -2 : H(-1;0;-1)$.
c) $\overrightarrow{C\Omega}(-4;0;0)$ et $\overrightarrow{C\Omega}\wedge\vec{u} = (0;-8;0) : d(\Omega;\Delta) = \frac{8}{\|\vec{u}\|} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = R$: la droite est tangente à (S) (au point $(-1;0;3)$).

Exercice 19

On considère $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4z + 9 = 0$ et les points $A(1;1;1)$, $B(3;1;0)$ et $C(1;0;-2)$.

1 Montrer que (S) est une sphère de centre Ω et de rayon R à déterminer.

2 a) Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. b) En déduire que A, B, C ne sont pas alignés. c) Déterminer une équation du plan (ABC). d) Montrer que (ABC) coupe (S) suivant un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

3 Déterminer une équation du plan $(\mathcal{P})$ tangent à (S) en C.

4 Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(D) = (\mathcal{P})\cap(ABC)$.

5 Déterminer une équation de la sphère (S') tangente au plan (ABC) en A, de centre A' appartenant au plan $(\mathcal{P}') : x + y + z = 0$.

✔ Solution

1 $(x-3)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4 : \Omega(3;0;-2)$, $R = 2$.

2 a) $\overrightarrow{AB}(2;0;-1)$, $\overrightarrow{AC}(0;-1;-3) : \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = (0-1\ ;\ 0+6\ ;\ -2-0) = (-1;6;-2)$.
b) Ce vecteur est non nul : A, B, C ne sont pas alignés.
c) $-x + 6y - 2z + d = 0$ avec $A : d = -3$; soit $(ABC) : x - 6y + 2z + 3 = 0$ (on vérifie B et C).
d) $d(\Omega;(ABC)) = \frac{|3-0-4+3|}{\sqrt{41}} = \frac{2}{\sqrt{41}} < 2$: cercle de rayon $r = \sqrt{4 - \frac{4}{41}} = \sqrt{\frac{160}{41}} = \frac{4\sqrt{410}}{41}$,

de centre $\Omega + t(1;-6;2)$ avec $41t+2=0$: $\left(\frac{121}{41};\frac{12}{41};-\frac{86}{41}\right)$.

3 $C \in (S)$ $(4+0+0=4)$ et $\overrightarrow{\Omega C}(-2;0;0)$ est normal à $(\mathcal{P}) : -2(x-1)=0$, soit $(\mathcal{P}) : x=1$.

4 $x=1$ et $1-6y+2z+3=0$, soit $z=3y-2$; avec $y=t$: $(D) : \{x=1\ ;\ y=t\ ;\ z=-2+3t$ $(t\in\mathbb{R})$.

5 A' est sur la normale à (ABC) en A : $A'(1+t;1-6t;1+2t)$ et $A' \in (\mathcal{P}') : 3-3t=0$, $t=1$, $A'(2;-5;3)$.
Rayon $AA'=\sqrt{1+36+4}=\sqrt{41}$: $(S') : (x-2)^2+(y+5)^2+(z-3)^2=41$.

Exercice 20

On considère $A(-1;0;3)$, $B(3;0;0)$, $C(7;1;-3)$ et $(S) : x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$.

1 Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{k}$ et en déduire que $3x+4z-9=0$ est une équation de (ABC).

2 Montrer que le centre de (S) est $\Omega(3;1;0)$ et que son rayon est $R=5$.

3 Soit (D) la droite passant par Ω et orthogonale à (ABC). a) Montrer que $\{x=3+3t\ ;\ y=1\ ;\ z=4t\ \ (t\in\mathbb{R})$ en est une représentation paramétrique. b) Montrer que (D) coupe (S) en $E(6;1;4)$ et $F(0;1;-4)$.

✔ Solution

1 $\overrightarrow{AB}(4;0;-3)$, $\overrightarrow{AC}(8;1;-6)$: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(0+3\ ;\ -24+24\ ;\ 4-0)=(3;0;4)$. Donc (ABC) : $3x+4z+d=0$ avec $A : -3+12+d=0$, $d=-9$.

2 $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=15+9+1=25$: $\Omega(3;1;0)$, $R=5$.

3 a) (D) passe par Ω $(t=0)$ et est dirigée par $(3;0;4)$, normal à (ABC).
b) $(3t)^2+0+(4t)^2=25 \iff t^2=1 : t=1$ donne $E(6;1;4)$ et $t=-1$ donne $F(0;1;-4)$.

Exercice 21

On considère $A(2;1;0)$ et $B(-4;1;0)$.

1 Soit $(\mathcal{P})$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$. Montrer que $x+y-z-3=0$ est une équation de $(\mathcal{P})$.

2 Soit (S) l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$. Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(-1;1;0)$ et de rayon $R=3$.

3 a) Calculer $d\big(\Omega;(\mathcal{P})\big)$ et en déduire que $(\mathcal{P})$ coupe (S) suivant un cercle $(\mathcal{C})$. b) Montrer que $H(0;2;-1)$ est le centre de $(\mathcal{C})$. c) Montrer que $\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$, puis en déduire l'aire du triangle OHB.

✔ Solution

1 $(x-2)+(y-1)-z=0$, soit $x+y-z-3=0$.

2 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(2-x)(-4-x)+(1-y)^2+z^2=x^2+2x-8+(y-1)^2+z^2$.
Donc $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \iff (x+1)^2+(y-1)^2+z^2=9$: sphère de centre $\Omega(-1;1;0)$, rayon 3 (de diamètre $[AB]$).

3 a) $d=\dfrac{|-1+1-0-3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}<3$: $(\mathcal{P})$ coupe (S) suivant un cercle, de rayon $r=\sqrt{9-3}=\sqrt{6}$.
b) $H\in(\mathcal{P})$ $(0+2+1-3=0)$ et $\overrightarrow{\Omega H}(1;1;-1)=\vec{u}$ est normal à $(\mathcal{P})$: H est le projeté de Ω sur $(\mathcal{P})$, c'est le centre de $(\mathcal{C})$.
c) $\overrightarrow{OH}(0;2;-1)$, $\overrightarrow{OB}(-4;1;0)$: $\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}=(0+1\ ;\ 4-0\ ;\ 0+8)=(1;4;8)$.
Aire $(OHB)=\dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}\|=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+16+64}=\dfrac{9}{2}$.

Exercice 22

On considère $A(2;-1;0)$, $B(1;1;-2)$, $C(0;-1;3)$, $\Omega(3;0;-1)$, la droite (D) passant par B et dirigée par $\vec{u}(2;-1;2)$, la sphère (S) de centre Ω et de rayon $R=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, et le plan $(\mathcal{P}) : x+2y+z-1=0$.

1 a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=6\vec{i}+7\vec{j}+4\vec{k}$. b) En déduire que A, B, C ne sont pas alignés. c) Calculer l'aire du triangle ABC. d) Déterminer une équation du plan (ABC).

2 a) Déterminer une représentation paramétrique de (D). b) Calculer $d\big(\Omega;(D)\big)$. c) En déduire que (D) est tangente à (S).

3 a) Donner un vecteur $\vec{n}$ normal à $(\mathcal{P})$. b) En déduire que (ABC) et $(\mathcal{P})$ se coupent suivant une droite (Δ). c) Vérifier que $C\in(\Delta)$. d) En déduire une représentation paramétrique de (Δ).

✔ Solution

1 a) $\overrightarrow{AB}(-1;2;-2)$, $\overrightarrow{AC}(-2;0;3)$: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(6-0\ ;\ 4+3\ ;\ 0+4)=(6;7;4)$.

b) Vecteur non nul : points non alignés. c) $\mathcal{A}=\frac{1}{2}\sqrt{36+49+16}=\dfrac{\sqrt{101}}{2}$.

d) $6x+7y+4z+d=0$ avec A : $12-7+d=0$, $d=-5$: $(ABC) : 6x+7y+4z-5=0$.

2 a) $(D) : \{x=1+2t\ ;\ y=1-t\ ;\ z=-2+2t\quad (t\in\mathbb{R})$.

b) $\overrightarrow{B\Omega}(2;-1;1)$: $\overrightarrow{B\Omega}\wedge\vec{u}=(-2+1\ ;\ 2-4\ ;\ -2+2)=(-1;-2;0)$; $d\big(\Omega;(D)\big)=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

c) $d\big(\Omega;(D)\big)=R$: (D) est tangente à (S).

3 a) $\vec{n}(1;2;1)$. b) $\vec{n}$ et $(6;7;4)$ ne sont pas colinéaires ($\frac{6}{1}\neq\frac{7}{2}$) : les plans sont sécants suivant une droite (Δ).

c) $C\in(ABC)$ et $0-2+3-1=0$, donc $C\in(\mathcal{P})$: $C\in(\Delta)$.

d) (Δ) est dirigée par $\vec{n}\wedge(6;7;4)=(8-7\ ;\ 6-4\ ;\ 7-12)=(1;2;-5)$: $(\Delta) : \{x=t\ ;\ y=-1+2t\ ;\ z=3-5t\quad (t\in\mathbb{R})$.

Exercice 23

On considère $(S) : x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$ et $(\mathcal{P}) : y-z=0$.

1 a) Déterminer le centre Ω et le rayon R de (S). b) Calculer $d\big(\Omega;(\mathcal{P})\big)$. c) En déduire que $(\mathcal{P})$ coupe (S) suivant un cercle $(\mathcal{C})$. d) Déterminer le centre et le rayon de $(\mathcal{C})$.

2 Soit (D) la droite passant par $A(1;-2;2)$ et orthogonale à $(\mathcal{P})$. a) Montrer que $\vec{u}(0;1;-1)$ dirige (D). b) Montrer que $\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\right\|=\sqrt{2}\,\|\vec{u}\|$. c) En déduire que (D) coupe (S) en deux points. d) Déterminer ces deux points.

✔ Solution

1 a) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$: $\Omega(1;1;1)$, $R=2$. b) $d=\dfrac{|1-1|}{\sqrt{2}}=0$.

c) $d<R$: intersection suivant un cercle. d) $\Omega\in(\mathcal{P})$: c'est un grand cercle, de centre $\Omega(1;1;1)$ et de rayon 2.

2 a) $\vec{n}(0;1;-1)$ est normal à $(\mathcal{P})$, donc dirige (D).

b) $\overrightarrow{\Omega A}(0;-3;1)$: $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=(3-1\ ;\ 0-0\ ;\ 0-0)=(2;0;0)$, de norme $2=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\sqrt{2}\,\|\vec{u}\|$.

c) $d\big(\Omega;(D)\big)=\sqrt{2}<2=R$: deux points d'intersection.

d) $(D) : \{x=1\ ;\ y=-2+t\ ;\ z=2-t$; $(t-3)^2+(1-t)^2=4\iff t^2-4t+3=0\iff t\in\{1;3\}$: les points $(1;-1;1)$ et $(1;1;-1)$.

Exercice 24

On considère $(S) = \{M(x;y;z) \ / \ x^2+y^2+z^2-4y-5=0\}$ et $(\mathcal{P}) : 2x-2y+z-2=0$.

1. Montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(0;2;0)$ et de rayon $R=3$.
2. Étudier la position relative de (S) et $(\mathcal{P})$.
3. Soient $(D) : \{x=t \ ; \ y=2t \ ; \ z=t \ (t\in\mathbb{R})$ et $(\mathcal{P}_m) : 2mx+(1-2m)y+(2m-2)z=0$, $m\in\mathbb{R}$. a) Montrer que $(D)\subset(\mathcal{P}_m)$. b) Vérifier que $O\in(\mathcal{P}_m)$ et que O est intérieur à (S) ; en déduire que $(\mathcal{P}_m)$ n'est jamais tangent à (S). c) Déterminer m pour lequel $(\mathcal{P}_m)$ coupe (S) suivant un grand cercle.

✔ Solution

1. $x^2+(y-2)^2+z^2=9 : \Omega(0;2;0)$, $R=3$.
2. $d\big(\Omega;(\mathcal{P})\big)=\dfrac{|0-4+0-2|}{3}=2<3 : (\mathcal{P})$ coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$, de centre $\Omega+\frac{2}{3}(2;-2;1)=\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.
3. a) $2mt+(1-2m)2t+(2m-2)t=t(2m+2-4m+2m-2)=0$ pour tout t : $(D)\subset(\mathcal{P}_m)$.
   b) Les coordonnées de O vérifient l'équation de $(\mathcal{P}_m)$; $O\Omega=2<3$, donc O est intérieur à (S). Un plan passant par un point intérieur coupe la sphère suivant un cercle : $d\big(\Omega;(\mathcal{P}_m)\big)\leq O\Omega=2<R$. Il n'est donc jamais tangent.
   c) Grand cercle $\iff \Omega\in(\mathcal{P}_m) \iff 2(1-2m)=0 \iff m=\dfrac{1}{2}$; alors $(\mathcal{P}_{1/2}) : x-z=0$.

Remarque : l'énoncé d'origine demandait m pour que $(\mathcal{P}_m)$ soit tangent à (S) ; cela conduit à $92m^2-92m+41=0$, sans solution (discriminant négatif), ce qu'explique la question b). La série a été corrigée.