CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 7

Nombres complexes

2BAC PC & SVT

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Exercice 1

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = 4 + 3i$ et $z_2 = 5 - 2i$. Écrire les nombres suivants sous forme algébrique : $z_1 + z_2$; $z_1 \cdot z_2$; z_1^2 ; $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Solution

$z_1 + z_2 = 9 + i$; $z_1 z_2 = 20 - 8i + 15i - 6i^2 = 26 + 7i$; $z_1^2 = 16 + 24i - 9 = 7 + 24i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(4+3i)(5+2i)}{25+4} = \frac{20+8i+15i-6}{29} = \frac{14}{29} + \frac{23}{29}i.$$

Exercice 2

1. On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^2.
2. En déduire les relations : $1 + j + j^2 = 0$; $j^3 = 1$; $\dfrac{1}{j} = j^2 = \bar{j}$.

Solution

1. $j^2 = \dfrac{1}{4} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$.
2. $1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$; $j^3 = j \cdot j^2 = j\bar{j} = |j|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$; $j \cdot j^2 = 1$ donne $\dfrac{1}{j} = j^2 = \bar{j}$.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $(3 - i)(z + 2i) = (3 + 5i)z + 2 - 4i$; $(8z + 2)(\bar{z} + 2 - 3i) = 0$; $z - 2i\bar{z} = 1$; $z^4 - 1 = 0$.

Solution

- $(3 - i)z + 6i + 2 = (3 + 5i)z + 2 - 4i \iff -6iz = -10i \iff z = \dfrac{5}{3}$. $S = \{\frac{5}{3}\}$.
- $8z + 2 = 0$ ou $\bar{z} = -2 + 3i$: $S = \{-\frac{1}{4} ; -2 - 3i\}$.
- Avec $z = x + iy$: $z - 2i\bar{z} = (x - 2y) + i(y - 2x) = 1 \iff x - 2y = 1$ et $y = 2x$, d'où $x = -\frac{1}{3}$, $y = -\frac{2}{3}$: $S = \{-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i\}$.
- $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1)$: $S = \{1; -1; i; -i\}$.

Exercice 4

Montrer que, pour tous nombres complexes z_1 et z_2 : $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\big(|z_1|^2 + |z_2|^2\big)$.

Solution

$|z_1 \pm z_2|^2 = (z_1 \pm z_2)(\overline{z_1} \pm \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm \big(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\big)$. En additionnant les deux égalités, les termes $\pm\big(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\big)$ s'éliminent : on obtient $2\big(|z_1|^2 + |z_2|^2\big)$.

Exercice 5

1 Écrire le nombre complexe $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$ sous forme trigonométrique.

2 En déduire l'écriture algébrique du nombre $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^8$.

Solution

1 Module $\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{6}{4}}=\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

2 Par Moivre : $(\sqrt{2})^8\left(\cos\frac{8\pi}{3}+i\sin\frac{8\pi}{3}\right)=16\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-8+8\sqrt{3}\,i$.

Exercice 6

Soit z un nombre complexe tel que $z\neq 1$. On pose $Z=\frac{z-2i}{z-1}$ avec $z=x+iy$ tel que $(x;y)\in\mathbb{R}^2$.

1 Montrer que : $\mathrm{Re}(Z)=\frac{x^2+y^2-x-2y}{(x-1)^2+y^2}$ et $\mathrm{Im}(Z)=-\frac{2x+y-2}{(x-1)^2+y^2}$.

2 Déterminer l'ensemble $(\mathcal{D})$ des points $M(z)$ tels que Z est un réel.

3 Déterminer l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points $M(z)$ tels que Z est un imaginaire pur.

Solution

1 $Z=\frac{\big(x+i(y-2)\big)\big((x-1)-iy\big)}{(x-1)^2+y^2}$; le numérateur vaut $x(x-1)+y(y-2)+i\big[(y-2)(x-1)-xy\big]=(x^2+y^2-x-2y)-i(2x+y-2)$.

2 $Z\in\mathbb{R}\iff 2x+y-2=0$ (avec $z\neq 1$) : $(\mathcal{D})$ est la droite d'équation $y=-2x+2$ privée du point $A(1;0)$.

3 $Z\in i\mathbb{R}\iff x^2+y^2-x-2y=0\iff\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$: $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2};1\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$, privé du point $A(1;0)$.

Exercice 7

On pose : $z_1=1-i$ et $z_2=1+\sqrt{2}+i$.

1 Écrire z_1 sous forme trigonométrique.

2 a) Montrer que : $z_1\cdot z_2=\sqrt{2}\cdot\overline{z_2}$.

b) Déduire que : $\arg(z_1)+2\arg(z_2)\equiv 0\ [2\pi]$, puis que : $\arg(z_2)\equiv\frac{\pi}{8}\ [\pi]$.

Solution

1 $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

2 a) $z_1z_2=(1-i)(1+\sqrt{2}+i)=1+\sqrt{2}+i-i-\sqrt{2}\,i+1=2+\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i=\sqrt{2}\big(1+\sqrt{2}-i\big)=\sqrt{2}\,\overline{z_2}$.

b) En passant aux arguments : $\arg z_1+\arg z_2\equiv\arg\overline{z_2}\equiv-\arg z_2\ [2\pi]$, d'où $\arg z_1+2\arg z_2\equiv 0$. Donc $2\arg z_2\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$, soit $\arg z_2\equiv\frac{\pi}{8}\ [\pi]$ (et même $[2\pi]$, car $\mathrm{Re}\,z_2>0$ et $\mathrm{Im}\,z_2>0$).

Exercice 8

On considère le nombre complexe : $Z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

1 Écrire Z^2 sous forme trigonométrique.

2 En déduire $\left|Z^{60}\right|$ et $\arg\left(Z^{60}\right)$.

✔ Solution

1. $Z^2 = (2+\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3}) + 2i\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2\sqrt{3} + 2i = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.
2. $Z^{60} = \left(Z^2\right)^{30}$: $\left|Z^{60}\right| = 4^{30} = 2^{60}$ et $\arg\left(Z^{60}\right) \equiv 30 \times \frac{\pi}{6} = 5\pi \equiv \pi\ [2\pi]$.

Exercice 9

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $a = 2\sqrt{3} + 9i$; $b = -i$; $c = -4\sqrt{3} - 9i$; $d = -2\sqrt{3} + i$. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un losange.

✔ Solution

$a+c = -2\sqrt{3} = b+d$: les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu, $ABCD$ est un parallélogramme.
$AB = |b-a| = |-2\sqrt{3} - 10i| = \sqrt{112}$ et $AD = |d-a| = |-4\sqrt{3} - 8i| = \sqrt{48+64} = \sqrt{112}$: deux côtés consécutifs égaux, donc $ABCD$ est un losange.

Exercice 10

Soient A, B, C et D quatre points distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Montrer que :

$$(AB)\,//\,(CD) \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{\overline{z_D} - \overline{z_C}}{\overline{z_B} - \overline{z_A}} \quad ; \quad (AB) \perp (CD) \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = -\frac{\overline{z_D} - \overline{z_C}}{\overline{z_B} - \overline{z_A}}$$

✔ Solution

Posons $Z = \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \neq 0$; alors $\overline{Z} = \dfrac{\overline{z_D} - \overline{z_C}}{\overline{z_B} - \overline{z_A}}$ et $\arg Z \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)\ [2\pi]$.

- $(AB)//(CD) \iff \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv 0\ [\pi] \iff Z \in \mathbb{R}^* \iff Z = \overline{Z}$.
- $(AB) \perp (CD) \iff \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff Z \in i\mathbb{R}^* \iff Z = -\overline{Z}$.

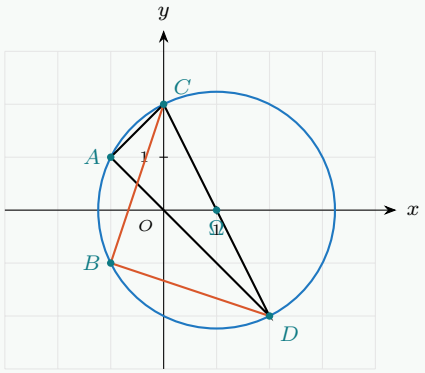
Exercice 11

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $a = -1+i$; $b = -1-i$; $c = 2i$; $d = 2-2i$.

1. Placer les points A, B, C et D.
2. Écrire les nombres complexes $\dfrac{c-a}{d-a}$ et $\dfrac{c-b}{d-b}$ sous forme algébrique puis exponentielle.
3. En déduire la nature des triangles ACD et BCD.
4. Montrer que A, B, C et D sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

✔ Solution

1. Voir la figure.
2. $\dfrac{c-a}{d-a} = \dfrac{1+i}{3-3i} = \dfrac{(1+i)^2}{3\times 2} = \dfrac{i}{3} = \dfrac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$; $\dfrac{c-b}{d-b} = \dfrac{1+3i}{3-i} = \dfrac{(1+3i)(3+i)}{10} = \dfrac{10i}{10} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.
3. $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$: ACD est rectangle en A. $\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ et $BC = BD$: BCD est rectangle et isocèle en B.
4. A et B voient $[CD]$ sous un angle droit : ils sont sur le cercle de diamètre $[CD]$, de centre $\Omega\left(\frac{c+d}{2}\right) = \Omega(1)$ et de rayon $\frac{|d-c|}{2} = \frac{|2-4i|}{2} = \sqrt{5}$. (Contrôle : $|a-1| = |-2+i| = \sqrt{5}$.)



Exercice 12

1 On considère les nombres complexes : $z_1 = 1+i$; $z_2 = \sqrt{3}+i$; $Z = z_1^3 \cdot z_2$.

a) Mettre z_1^3 sous forme algébrique.

b) Mettre Z sous forme algébrique.

2 a) Déterminer le module et un argument de z_1 puis de z_1^3.

b) Déterminer le module et un argument de z_2.

c) Déduire des questions précédentes une écriture trigonométrique de Z.

3 En comparant les écritures trigonométrique et algébrique de Z, montrer que :
$\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

✔ Solution

1 a) $z_1^2 = 2i$, donc $z_1^3 = 2i(1+i) = -2+2i$.

b) $Z = (-2+2i)(\sqrt{3}+i) = -2\sqrt{3} - 2i + 2\sqrt{3}\,i - 2 = -(2\sqrt{3}+2) + (2\sqrt{3}-2)i$.

2 a) $|z_1| = \sqrt{2}$, $\arg z_1 \equiv \frac{\pi}{4}$; $|z_1^3| = 2\sqrt{2}$, $\arg z_1^3 \equiv \frac{3\pi}{4}$.

b) $|z_2| = 2$, $\arg z_2 \equiv \frac{\pi}{6}$.

c) $Z = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$ (car $\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{12}$).

3 $\cos\frac{11\pi}{12} = \frac{-(2\sqrt{3}+2)}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{11\pi}{12} = \frac{2\sqrt{3}-2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 13

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$. Unité graphique : 1 cm. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 2$, $b = -\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et $c = -\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

1 Écrire les nombres complexes b et c sous forme trigonométrique.

2 Placer les points A, B, C et I le milieu du segment $[AB]$ dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.

3 Montrer que le triangle OAB est isocèle et en déduire une mesure en radians de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$.

4 Déterminer z_I, l'affixe du point I, puis le module de z_I.

5 En déduire que : $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

✔ Solution

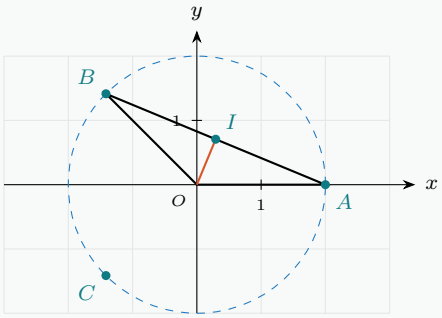
1 $b = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; $\quad c = 2\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

2 Voir la figure.

3 $OA = |a| = 2 = |b| = OB$: OAB est isocèle en O. La médiane (OI) est aussi bissectrice de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4}$, donc $(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) \equiv \dfrac{3\pi}{8}\ [2\pi]$.

4 $z_I = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$; $|z_I|^2 = \dfrac{(2-\sqrt{2})^2+2}{4} = \dfrac{8-4\sqrt{2}}{4} = 2-\sqrt{2}$, donc $|z_I| = \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

5 $z_I = |z_I|\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$, d'où $\cos\frac{3\pi}{8} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\frac{3\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.



Exercice 14

1 a) Montrer que, pour tous nombres complexes a et b : $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

b) Montrer que pour tout réel x : $\cos^4 x = \dfrac{1}{8}\cos(4x) + \dfrac{1}{2}\cos(2x) + \dfrac{3}{8}$.

2 Montrer que pour tout réel x : $\cos(3x)\cdot\cos^2(5x) = \dfrac{1}{4}\cos(13x) + \dfrac{1}{4}\cos(7x) + \dfrac{1}{2}\cos(3x)$.

3 a) Montrer que pour tout réel x : $\cos^2 x \cdot \sin^3 x = -\dfrac{1}{16}\sin(5x) + \dfrac{1}{16}\sin(3x) + \dfrac{1}{8}\sin x$.

b) En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^2 x \cdot \sin^3 x$ sur $\mathbb{R}$.

✔ Solution

1 a) $(a+b)^4 = (a^2+2ab+b^2)^2 = a^4+4a^2b^2+b^4+4a^3b+2a^2b^2+4ab^3 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

b) Avec $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et a) : $\cos^4 x = \dfrac{1}{16}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}+4\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)+6\right) = \dfrac{2\cos 4x + 8\cos 2x + 6}{16} = \dfrac{1}{8}\cos 4x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{3}{8}$.

2 $\cos^2(5x) = \frac{1+\cos(10x)}{2}$ et $\cos(3x)\cos(10x) = \frac{1}{2}\left[\cos(13x)+\cos(7x)\right]$: $\cos 3x\cos^2 5x = \frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos 13x + \frac{1}{4}\cos 7x$.

3 a) $\cos^2 x\sin^2 x = \frac{1}{4}\sin^2(2x) = \frac{1-\cos 4x}{8}$, donc $\cos^2 x\sin^3 x = \frac{1}{8}\sin x - \frac{1}{8}\sin x\cos 4x$; or $\sin x\cos 4x = \frac{1}{2}\left[\sin 5x - \sin 3x\right]$: $\cos^2 x\sin^3 x = \frac{1}{8}\sin x - \frac{1}{16}\sin 5x + \frac{1}{16}\sin 3x$.

b) $F(x) = -\dfrac{1}{8}\cos x + \dfrac{1}{80}\cos(5x) - \dfrac{1}{48}\cos(3x)$.

Exercice 15 : Normale 2008

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 34 = 0$.

2 On considère les points A, B et C d'affixes $a = 3+5i$, $b = 3-5i$, $c = 7+3i$. Soit $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $4-2i$.

a) Montrer que $z' = z + 4 - 2i$ et vérifier que le point C est l'image de A par la translation T.

b) Prouver que $\dfrac{b-c}{a-c} = 2i$.

c) Déduire que le triangle ABC est rectangle et que $BC = 2AC$.

✔ Solution

1 $\Delta = 36 - 136 = -100 = (10i)^2 : S = \{3 - 5i\,;\, 3 + 5i\}$.

2 a) $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \iff z' - z = 4 - 2i$. Et $a + 4 - 2i = 7 + 3i = c$.

b) $\dfrac{b-c}{a-c} = \dfrac{-4-8i}{-4+2i} = \dfrac{(4+8i)(4+2i)}{16+4} = \dfrac{40i}{20} = 2i$.

c) $\arg(2i) \equiv \frac{\pi}{2} : (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2}$, triangle rectangle en C ; $|2i| = 2 : BC = 2AC$.

Exercice 16 : Normale 2018

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2 + 2z + 5 = 0$.

2 On considère la rotation $\mathcal{R}$ de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

a) Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $d = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

b) On considère $A(a)$ avec $a = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$ et $B(b) = \mathcal{R}(A)$; montrer que : $b = d \cdot a$.

3 Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et $C(c)$ l'image de B par t.

a) Vérifier que $c = b + a$ et en déduire que $c = a\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

b) Déterminer $\arg\left(\dfrac{a}{c}\right)$ puis en déduire que le triangle OAC est équilatéral.

✔ Solution

1 $\Delta = 4 - 40 = -36 = (6i)^2 : S = \{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\,;\, -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\}$.

2 a) $d = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

b) L'écriture complexe de $\mathcal{R}$ est $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z = dz$, donc $b = da$.

3 a) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$ donne $c = b + a = a(d+1) = a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

b) $\dfrac{a}{c} = \dfrac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} : \arg\frac{a}{c} \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $\left|\frac{a}{c}\right| = 1$. Donc $OA = OC$ et $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{\pi}{3} : OAC$ est équilatéral.

Exercice 17 : Normale 2019

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$.

2 On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 1 - i\sqrt{3}$, $b = 2 + 2i$, $c = \sqrt{3} + i$ et $d = -2 + 2\sqrt{3}$.

a) Vérifier que $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$.

b) En déduire que les points A, C et D sont alignés.

3 Soit $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par la rotation $\mathcal{R}$ de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Vérifier que $z' = \dfrac{1}{2}az$.

4 Soient $H(h)$ l'image de B par $\mathcal{R}$ et P le point d'affixe $p = a - c$.

a) Vérifier que $h = ip$.

b) Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O.

✔ Solution

1 $\Delta = 4 - 16 = -12 = (2\sqrt{3}\,i)^2 : S = \{1 - i\sqrt{3}\,;\, 1 + i\sqrt{3}\}$.

2 a) $a-d=1-i\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}=(3-2\sqrt{3})-i\sqrt{3}$ et $c-d=\sqrt{3}+i+2-2\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})+i$, donc $-\sqrt{3}(c-d)=(-2\sqrt{3}+3)-i\sqrt{3}=a-d$.

b) $\overrightarrow{DA}=-\sqrt{3}\,\overrightarrow{DC}$: les vecteurs sont colinéaires, A, C et D sont alignés.

3 $e^{-i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{1}{2}a$: $z'=\frac{1}{2}az$.

4 a) $h=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})(2+2i)=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$; $p=a-c=(1-\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})i$, donc $ip=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i=h$.

b) $\dfrac{h}{p}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$: $OH=OP$ et $\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OH}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$; OHP est rectangle et isocèle en O.

Remarque : l'énoncé recopié donnait $d=-2+2\sqrt{3}\,i$; avec cette valeur la relation 2.a) est fausse et A, C, D ne sont pas alignés. L'énoncé du bac est $d=-2+2\sqrt{3}$ (réel) ; la série a été corrigée.

Exercice 18 : Normale 2020

1 Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation (E) : $z^2-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)z+16=0$.

a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta=-4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$.

b) En déduire les solutions de l'équation (E).

2 Soient $a=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$, $b=1+i\sqrt{3}$ et $c=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

a) Vérifier que $b\bar{c}=a$, puis en déduire que $ac=4b$.

b) Écrire les nombres complexes b et c sous forme trigonométrique.

c) En déduire que $a=4\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$.

3 On considère les points B, C et D d'affixes b, c et $d=a^4$, et la rotation $\mathcal{R}$ de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{12}$ qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$.

a) Vérifier que $z'=\dfrac{1}{4}az$.

b) Déterminer l'image du point C par la rotation $\mathcal{R}$.

c) Déterminer la nature du triangle OBC.

d) Montrer que $a^4=128b$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés.

✔ Solution

1 a) $\Delta=4(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2-64=4(8+4\sqrt{3})-64=16\sqrt{3}-32$ et $-4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2=-4(8-4\sqrt{3})=16\sqrt{3}-32$.

b) $\Delta=\left(2i(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right)^2$: $S=\left\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})\,;\,(\sqrt{6}+\sqrt{2})-i(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right\}=\{a;\bar{a}\}$.

2 a) $b\bar{c}=(1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})=\sqrt{2}+\sqrt{6}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})=a$; donc $ac=b\bar{c}c=b|c|^2=4b$.

b) $b=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; $c=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

c) $a=b\bar{c}$: $|a|=4$ et $\arg a\equiv\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$.

3 a) $z'=e^{i\frac{\pi}{12}}z=\frac{a}{4}z$.

b) $\frac{1}{4}ac=b$: l'image de C est B.

c) $OB=OC=2$ et $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{12}$: OBC est isocèle en O.

d) $a^4=4^4e^{i\frac{\pi}{3}}=256e^{i\frac{\pi}{3}}=128\times 2e^{i\frac{\pi}{3}}=128b$. Donc $d=128b$, $\overrightarrow{OD}=128\overrightarrow{OB}$: O, B, D alignés.

Exercice 19 : Normale 2021

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-\sqrt{3}z+1=0$.

2 Soient les nombres complexes $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Écrire a sous forme algébrique.

b) Vérifier que $\bar{a}b = \sqrt{3}$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $\bar{a}$.

3 Montrer que le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport.

4 Soit $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par la rotation R de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Écrire z' en fonction de z et a.

b) Soit d l'affixe du point D image de C par la rotation R ; montrer que $d = a + 1$.

c) Soit I le point d'affixe le nombre 1 ; montrer que $ADIO$ est un losange.

5 a) Vérifier que $d - b = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$; en déduire un argument du nombre $d - b$.

b) Écrire le nombre $1 - b$ sous forme trigonométrique.

c) Déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD})$.

✔ Solution

1 $\Delta = 3 - 4 = -1 = i^2$: $S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\,;\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$.

2 a) $a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

b) $\bar{a}b = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i - \frac{3}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

3 $|a| = 1$, donc $\bar{a} = \frac{1}{a}$ et $b = \sqrt{3}\,a$: $B = h(A)$ avec h de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.

4 a) $z' - a = i(z - a)$, soit $z' = iz + a(1 - i)$.

b) $d = i\bar{a} + a - ia = a + i(\bar{a} - a) = a + i(-2i\,\mathrm{Im}\,a) = a + 2\,\mathrm{Im}\,a = a + 1$.

c) $\overrightarrow{AD}$ a pour affixe $d - a = 1$, celle de $\overrightarrow{OI}$: $ADIO$ est un parallélogramme ; et $OA = |a| = 1 = OI$: c'est un losange.

5 a) $d - b = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{3}{2} + i\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$; comme $\frac{\sqrt{3}-1}{2} > 0$: $\arg(d-b) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

b) $1 - b = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

c) $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}) \equiv \arg\dfrac{d-b}{1-b} \equiv -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{12}\ [2\pi]$.

Exercice 20

Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z) = z^4 - 4z^2 + 16$. On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $P(z) = 0$.

1 Déterminer le réel a tel que : $P(z) = (z^2 + az + 4)(z^2 - az + 4)$.

2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On notera z_1 la solution dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives. Vérifier que les solutions de (E) sont : z_1 ; $-z_1$; $\overline{z_1}$; $-\overline{z_1}$. Écrire ces solutions sous forme trigonométrique.

3 a) Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives z_1 ; $-\overline{z_1}$; $-z_1$; $\overline{z_1}$.

b) Montrer que ces points sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 2.

✔ Solution

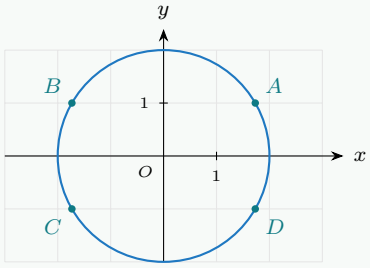
1 $(z^2+4)^2 - a^2z^2 = z^4 + (8 - a^2)z^2 + 16$: $8 - a^2 = -4$, d'où $a = 2\sqrt{3}$ (ou $-2\sqrt{3}$).

2 $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$: $\Delta = -4$, $z = \sqrt{3} \pm i$; $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$: $z = -\sqrt{3} \pm i$. $z_1 = \sqrt{3} + i$ et

$S = \{z_1; -z_1; \overline{z_1}; -\overline{z_1}\}$ avec

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad \overline{z_1} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}, \quad -\overline{z_1} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}, \quad -z_1 = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$$

3 Les quatre affixes ont pour module 2 : les points sont sur le cercle de centre O et de rayon 2.



Exercice 21

On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

1 Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$, puis montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$: $P(z) = (z^2+3)\,Q(z)$.

2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3 On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = i\sqrt{3}$; $z_B = -i\sqrt{3}$; $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ et $z_D = \overline{z_C}$. Montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.

4 On note E le symétrique de D par rapport à O. Montrer que $\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ puis déterminer la nature du triangle BEC.

✔ Solution

1 Pour $z = i\sqrt{3}$: $z^2 = -3$, $z^3 = -3i\sqrt{3}$, $z^4 = 9$, donc $P = 9 + 18\sqrt{3}\,i - 72 - 18\sqrt{3}\,i + 63 = 0$. P est à coefficients réels : $P(-i\sqrt{3}) = \overline{P(i\sqrt{3})} = 0$. En identifiant $(z^2+3)(z^2+\alpha z+\beta) = z^4 + \alpha z^3 + (\beta+3)z^2 + 3\alpha z + 3\beta$: $\alpha = -6$, $\beta = 21$. Donc $Q(z) = z^2 - 6z + 21$.

2 Q : $\Delta = 36 - 84 = -48 = (4\sqrt{3}\,i)^2$, $z = 3 \pm 2\sqrt{3}\,i$. $S = \{i\sqrt{3}\,;\ -i\sqrt{3}\,;\ 3+2i\sqrt{3}\,;\ 3-2i\sqrt{3}\}$.

3 Soit Ω d'affixe 3 : $|z_A - 3| = |z_B - 3| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$ et $|z_C - 3| = |z_D - 3| = 2\sqrt{3}$. Les quatre points sont sur le cercle de centre $\Omega(3)$ et de rayon $2\sqrt{3}$.

4 $z_E = -z_D = -3 + 2i\sqrt{3}$. $\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \dfrac{3 + 3i\sqrt{3}}{-3 + 3i\sqrt{3}} = \dfrac{(1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{4} = \dfrac{2 - 2i\sqrt{3}}{4} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Donc $BC = BE$ et $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{3}$: BEC est équilatéral.

Exercice 22

1 On rappelle que : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = 8$.

2 On considère $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ avec $a = 2$, $b = -1 + i\sqrt{3}$, $c = -1 - i\sqrt{3}$, la rotation $\mathcal{R}$ de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et la rotation $\mathcal{R}'$ de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. On pose $B'(b') = \mathcal{R}'(B)$ et $C'(c') = \mathcal{R}(C)$.

a) Placer les points A, B et C ; on complétera cette figure.

b) Montrer que $b' = 2 + \sqrt{3} + 3i$.

c) Montrer que b' et c' sont des nombres conjugués.

3 On appelle M, N, P et Q les milieux respectifs des segments $[CB]$, $[BB']$, $[B'C']$ et $[C'C]$, d'affixes m, n, p et q.

a) Montrer que $n = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1 + i\sqrt{3})$. En déduire que les points O, N et C sont alignés.

b) Montrer que $n+1=i(q+1)$. Que peut-on en déduire pour le triangle MNQ ?

c) Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un carré.

✔ Solution

1 $z^3-8=(z-2)(z^2+2z+4)$; $z^2+2z+4=0 : \Delta=-12$, $z=-1\pm i\sqrt{3}$. $S=\{2;-1+i\sqrt{3};-1-i\sqrt{3}\}$.

2 a) Voir la figure.

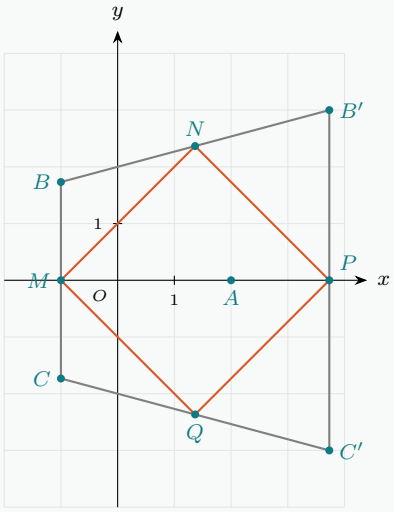
b) $b'-a=-i(b-a) : b'=2-i(-3+i\sqrt{3})=2+\sqrt{3}+3i$.

c) $c'-a=i(c-a) : c'=2+i(-3-i\sqrt{3})=2+\sqrt{3}-3i=\overline{b'}$.

3 a) $n=\dfrac{b+b'}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}i=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3})$. Or $c=-(1+i\sqrt{3})$, donc $n=-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}c$: $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont colinéaires.

b) $m=\frac{b+c}{2}=-1$ et $q=\frac{c+c'}{2}=\overline{n}$. $n+1=\frac{3+\sqrt{3}}{2}(1+i)$ et $q+1=\frac{3+\sqrt{3}}{2}(1-i)$, d'où $i(q+1)=\frac{3+\sqrt{3}}{2}(1+i)=n+1$. Donc $n-m=i(q-m) : MN=MQ$ et $(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MN})\equiv\frac{\pi}{2}$; MNQ est rectangle et isocèle en M.

c) $p=\frac{b'+c'}{2}=2+\sqrt{3}$ et $m+p=1+\sqrt{3}=n+q$: $MNPQ$ est un parallélogramme. Avec 3.b), c'est un carré.



Exercice 23

On considère $I(1)$, $A(1-2i)$, $B(-2+2i)$ et $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[AB]$ (unité graphique : 2 cm).

1 Déterminer le centre Ω du cercle $(\mathcal{C})$ et calculer son rayon.

2 Soit D le point d'affixe $z_D=\dfrac{3+9i}{4+2i}$. Écrire z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle $(\mathcal{C})$.

3 Sur le cercle $(\mathcal{C})$, on considère le point E, d'affixe z_E, tel qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega E})$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

a) Préciser le module et un argument de $z_E+\dfrac{1}{2}$.

b) En déduire que $z_E=\dfrac{5\sqrt{2}-2}{4}+\dfrac{5\sqrt{2}}{4}i$.

4 Soit r la transformation qui à $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que : $z'+\dfrac{1}{2}=e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z+\dfrac{1}{2}\right)$.

a) Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.

b) Soit K le point d'affixe $z_K=2$. Déterminer par le calcul l'image de K par r. Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

✔ Solution

1 $z_\Omega = \frac{z_A+z_B}{2} = -\frac{1}{2}$; rayon $\frac{|z_B-z_A|}{2} = \frac{|-3+4i|}{2} = \frac{5}{2}$.

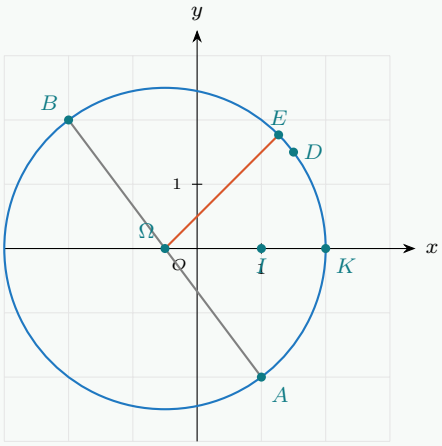
2 $z_D = \dfrac{(3+9i)(4-2i)}{20} = \dfrac{30+30i}{20} = \dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$; $\left|z_D+\frac{1}{2}\right| = \left|2+\frac{3}{2}i\right| = \sqrt{4+\frac{9}{4}} = \frac{5}{2}$: $D \in (\mathcal{C})$.

3 a) $E \in (\mathcal{C})$: $\left|z_E+\frac{1}{2}\right| = \frac{5}{2}$. $\overrightarrow{\Omega I}$ a pour affixe $\frac{3}{2} > 0$, donc $\arg\left(z_E+\frac{1}{2}\right) \equiv (\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E}) \equiv \frac{\pi}{4}$.

b) $z_E + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$, d'où le résultat.

4 a) r est la rotation de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b) $z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}} \times \frac{5}{2}$: $z' = z_E$, donc $r(K) = E$. Géométriquement : $K \in (\mathcal{C})$ (car $\Omega K = \frac{5}{2}$) et K est sur la demi-droite $[\Omega I)$; la rotation envoie K sur le point du cercle tel que $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E}) = \frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire E.



Exercice 24

Première partie : On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$.

1 Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) s'écrit : $(z-2)(az^2+bz+c) = 0$, où a, b et c sont trois réels à déterminer.

2 En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

Deuxième partie :

1 Placer les points A, B et D d'affixes respectives : $z_A = -2-2i$, $z_B = 2$ et $z_D = -2+2i$.

2 Calculer l'affixe z_C du point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Placer C.

3 Soit E l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, et F l'image de C par la rotation de centre D et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Calculer les affixes des points E et F, notées z_E et z_F.

b) Placer les points E et F.

4 a) Vérifier que $\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$.

b) En déduire la nature du triangle AEF.

5 Soit I le milieu de $[EF]$. Déterminer l'image du triangle EBA par la rotation $\mathcal{R}$ de centre I et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

✔ Solution

Première partie.

1 $8+8-16 = 0$. $(z-2)(az^2+bz+c) = az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c$: $a = 1$, $b = 4$, $c = 8$.

2 $z^2+4z+8=0$: $\Delta=-16$, $z=-2\pm 2i$. $S=\{2;-2+2i;-2-2i\}=\left\{2\,;\,2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\,;\,2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right\}$.

Deuxième partie.

1 Voir la figure.

2 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$: $z_C=z_D+z_B-z_A=2+4i$.

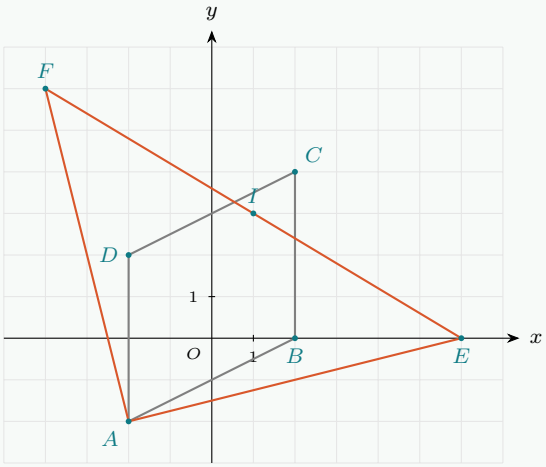
3 a) $z_E=z_B-i(z_C-z_B)=2-i\times 4i=6$; $z_F=z_D+i(z_C-z_D)=-2+2i+i(4+2i)=-4+6i$.

b) Voir la figure.

4 a) $\dfrac{z_F-z_A}{z_E-z_A}=\dfrac{-2+8i}{8+2i}=\dfrac{(-2+8i)(8-2i)}{68}=\dfrac{68i}{68}=i$.

b) $AE=AF$ et $(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF})\equiv\frac{\pi}{2}$: AEF est rectangle et isocèle en A.

5 $z_I=1+3i$ et $\mathcal{R}$: $z'=z_I-i(z-z_I)$. On trouve $\mathcal{R}(E)=-2-2i=A$, $\mathcal{R}(B)=-2+2i=D$, $\mathcal{R}(A)=-4+6i=F$. L'image du triangle EBA est le triangle ADF.



Exercices complémentaires

Exercice 25 : Rattrapage 2018

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$.

2 On considère le point A d'affixe $a=\sqrt{2}(1-i)$ et la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a) Écrire a sous forme trigonométrique.

b) Vérifier que l'affixe du point B, image de A par R, est : $b=2\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$.

3 On considère le point C d'affixe $c=1+i$.

a) Montrer que : $b^2-c^2=2\sqrt{3}$.

b) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ et D l'image de B par t. Montrer que : $OD=|b+c|$.

c) En déduire que : $OD\times BC=2\sqrt{3}$.

✔ Solution

1 $\Delta=8-16=-8=(2\sqrt{2}\,i)^2$: $S=\{\sqrt{2}-i\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}+i\sqrt{2}\}$.

2 a) $a=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

b) $b=e^{i\frac{\pi}{3}}a=2e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}=2e^{i\frac{\pi}{12}}$.

3 a) $b^2=4e^{i\frac{\pi}{6}}=2\sqrt{3}+2i$ et $c^2=2i$: $b^2-c^2=2\sqrt{3}$.

b) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OC}$: $d=b+c$ et $OD=|b+c|$.

c) $OD \times BC = |b+c|\,|b-c| = |b^2-c^2| = 2\sqrt{3}$.

Exercice 26

1. On considère $P(z) = z^3 - 2(2+i)z^2 + 8(2+i)z - 32i$.
   a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure $z_0 = \lambda i$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ à déterminer.
   b) Trouver les réels α et β tels que : $P(z) = (z - z_0)(z^2 + \alpha z + \beta)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 16 = 0$.
3. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2 - 2\sqrt{3}i$ et $b = 2\sqrt{3} + 2i$.
   a) Écrire a et b sous forme trigonométrique, et vérifier que a^{21} est un nombre réel.
   b) Montrer que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.
4. a) Déterminer l'affixe du point E, image de A par la translation t de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
   b) Montrer que $OAEB$ est un carré.
5. On considère la rotation R de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$.
   a) Montrer que : $z' = -iz + 2\sqrt{3} - 2 + \left(2 + 2\sqrt{3}\right)i$.
   b) Déduire que l'affixe du point C, image de A par R, est $c = -2 + 2\sqrt{3}i$.
6. Soit le point D d'affixe $d = 6 + 2\sqrt{3}i$.
   a) Montrer que les points O, B et D sont alignés.
   b) Donner l'écriture exponentielle de $\dfrac{d-c}{a-c}$, puis en déduire la nature du triangle ADC.

✔ Solution

1. a) $P(\lambda i) = (4\lambda^2 - 8\lambda) + i(-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 16\lambda - 32)$. La partie réelle est nulle pour $\lambda \in \{0; 2\}$; seule $\lambda = 2$ annule la partie imaginaire ($-8 + 8 + 32 - 32 = 0$). Donc $z_0 = 2i$.
   b) $(z - 2i)(z^2 + \alpha z + \beta) = z^3 + (\alpha - 2i)z^2 + (\beta - 2i\alpha)z - 2i\beta$: $\alpha = -4$ et $\beta = 16$ (contrôle : $\beta - 2i\alpha = 16 + 8i = 8(2+i)$).
2. $\Delta = 16 - 64 = -48$: $S = \{2 - 2\sqrt{3}\,i\,;\ 2 + 2\sqrt{3}\,i\}$.
3. a) $a = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $b = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$; $a^{21} = 4^{21}e^{-7i\pi} = -4^{21} \in \mathbb{R}$.
   b) $\dfrac{b}{a} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$: $OA = OB$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$.
4. a) $e = a + b = (2 + 2\sqrt{3}) + (2 - 2\sqrt{3})i$.
   b) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OB}$: $OAEB$ est un parallélogramme ; avec 3.b), c'est un carré.
5. a) $z' - b = -i(z - b)$, soit $z' = -iz + b(1+i) = -iz + (2\sqrt{3} - 2) + (2\sqrt{3} + 2)i$.
   b) $c = -ia + (2\sqrt{3} - 2) + (2\sqrt{3} + 2)i = (-2\sqrt{3} - 2i) + (2\sqrt{3} - 2) + (2\sqrt{3} + 2)i = -2 + 2\sqrt{3}\,i$.
6. a) $\dfrac{d}{b} = \dfrac{(6 + 2\sqrt{3}i)(2\sqrt{3} - 2i)}{16} = \dfrac{16\sqrt{3}}{16} = \sqrt{3} \in \mathbb{R}$: O, B, D alignés.
   b) $\dfrac{d-c}{a-c} = \dfrac{8}{4 - 4\sqrt{3}i} = \dfrac{2}{1 - \sqrt{3}i} = \dfrac{1 + \sqrt{3}i}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$: $CD = CA$ et $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \frac{\pi}{3}$; ADC est équilatéral.

Exercice 27 : Rattrapage 2022

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + 5i$, $z_B = 1 - 5i$ et $z_C = 5 - 3i$.

1. Déterminer le nombre complexe z_D, affixe du point D milieu du segment $[AC]$.
2. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. Déterminer z_E, affixe du point E image de B par h.

3 On considère la rotation R de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$; déterminer l'image de B par R.

4 Soit F le point d'affixe $z_F = -1+i$.

a) Vérifier que $\frac{z_D - z_A}{z_F - z_A} \times \frac{z_F - z_E}{z_D - z_E} = -1$.

b) En déduire que $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}) \equiv \pi\ [2\pi]$.

c) Déterminer la forme trigonométrique du nombre $\frac{z_E - z_F}{z_A - z_F}$ et déduire la nature du triangle AEF.

d) Déduire que les points A, D, E et F appartiennent à un cercle dont on déterminera un diamètre.

✔ Solution

1 $z_D = \frac{z_A + z_C}{2} = 3+i$.

2 $z_E - z_A = \frac{1}{2}(z_B - z_A) = -5i$: $z_E = 1$.

3 $z' = z_C - i(z_B - z_C) = 5 - 3i - i(-4-2i) = 3+i = z_D$: l'image de B est D.

4 a) $\frac{2-4i}{-2-4i} = \frac{3+4i}{5}$ et $\frac{-2+i}{2+i} = \frac{-3+4i}{5}$; produit : $\frac{(3+4i)(-3+4i)}{25} = \frac{-25}{25} = -1$.

b) Le premier quotient a pour argument $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$, le second $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF})$; leur produit -1 a pour argument π.

c) $\frac{z_E - z_F}{z_A - z_F} = \frac{2-i}{2+4i} = \frac{-10i}{20} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$: AEF est rectangle en F.

d) De même $\frac{z_A - z_D}{z_E - z_D} = \frac{-2+4i}{-2-i} = -2i$: AED est rectangle en D. Donc D et F sont sur le cercle de diamètre $[AE]$ (centre $1+\frac{5}{2}i$, rayon $\frac{5}{2}$), qui contient aussi A et E.

Exercice 28 : Normale 2015

I. On considère le nombre complexe $a = 2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

1 Montrer que $|a| = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

2 Vérifier que $a = 2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) + 2i\sin\frac{\pi}{4}$.

3 a) En linéarisant $\cos^2\theta$, montrer que : $1+\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta$.

b) Montrer que $a = 4\cos^2\frac{\pi}{8} + 4i\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$.

c) Montrer que $4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ est une forme trigonométrique du nombre a.

II. On considère $\Omega(\sqrt{2})$, $A(a)$ et la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1 Montrer que l'affixe b du point B, image de A par R, est $2i$.

2 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-2i| = 2$.

✔ Solution

I.

1 $|a|^2 = (2+\sqrt{2})^2 + 2 = 8+4\sqrt{2} = 4(2+\sqrt{2})$, d'où $|a| = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

2 $2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2i\frac{\sqrt{2}}{2} = 2+\sqrt{2}+i\sqrt{2} = a$.

3 a) $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$, d'où $1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta$.

b) Avec $\theta = \frac{\pi}{8}$: $2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) = 4\cos^2\frac{\pi}{8}$ et $2\sin\frac{\pi}{4} = 4\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$.

c) $a = 4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ avec $4\cos\frac{\pi}{8} > 0$: c'est une forme trigonométrique.

II.

1 $b = \omega + i(a-\omega) = \sqrt{2} + i(2+i\sqrt{2}) = \sqrt{2}+2i-\sqrt{2} = 2i$.

2 $|z-2i|=2 \iff BM=2$: c'est le cercle de centre $B(2i)$ et de rayon 2 (il passe par O).

Exercice 29

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-\sqrt{2}z+1=0$.

2 On pose $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$. Écrire a sous forme trigonométrique, puis en déduire que a^8 est un nombre réel.

3 On considère $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ avec $b=\sqrt{2}+1+i$ et $c=\bar{b}$, et la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$.

a) Montrer que $z'=az$.

b) Vérifier que le point B est l'image du point C par la rotation R, et en déduire la nature du triangle OBC.

c) En déduire que $\arg(b)\equiv\dfrac{1}{2}\arg(a)\ [2\pi]$, puis déterminer un argument du nombre complexe b.

4 On pose $h=\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}$. Montrer que : $h^4+a^8+\sqrt{2}=b$.

✔ Solution

1 $\Delta=2-4=-2=(i\sqrt{2})^2$: $S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\,;\ \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$.

2 $a=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$; $a^8=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1\in\mathbb{R}$.

3 a) $z'=e^{i\frac{\pi}{4}}z=az$.

b) $ac=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{2}+1-i)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[(\sqrt{2}+2)+i\sqrt{2}\right]=1+\sqrt{2}+i=b$: $R(C)=B$. Donc $OB=OC$ et $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{4}$: OBC est isocèle en O.

c) $\arg b\equiv\arg a+\arg c\equiv\arg a-\arg b$, d'où $2\arg b\equiv\arg a\ [2\pi]$ et $\arg b\equiv\frac{\pi}{8}\ [\pi]$; comme $\operatorname{Re}b>0$ et $\operatorname{Im}b>0$: $\arg b\equiv\frac{\pi}{8}\ [2\pi]$.

4 $h^4=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$ et $a^8=1$: $h^4+a^8+\sqrt{2}=1+\sqrt{2}+i=b$.