CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 5

Fonctions primitives

2BAC PC & SVT

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Dans tout ce corrigé, C désigne une constante réelle quelconque. Rappels utilisés : une primitive de $u'u^n$ est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ $(n \neq -1)$, de $\frac{u'}{u^2}$ est $-\frac{1}{u}$, de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$, de $u'\sqrt[n]{u^m}$ est $\frac{n}{m+n}\sqrt[n]{u^{m+n}}$ $(u>0)$.

Exercice 1

Soient F et G deux fonctions définies par :

$$F(x)=\frac{1}{x^2+1} \quad \text{et} \quad G(x)=\frac{5+3x^2}{2(x^2+1)}.$$

Montrer que F et G sont deux fonctions primitives de la même fonction f sur $\mathbb{R}$.

Solution

$G(x)=\frac{3(x^2+1)+2}{2(x^2+1)}=\frac{3}{2}+\frac{1}{x^2+1}=F(x)+\frac{3}{2}$. F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et diffèrent d'une constante, donc $G'=F'$: ce sont deux primitives de la même fonction $f(x)=F'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$.

Exercice 2

Soient F et G deux fonctions définies par :

$$F(x)=\frac{x^2+5x-9}{x-2} \quad \text{et} \quad G(x)=\frac{x^2+x-1}{x-2}.$$

Montrer que F et G sont deux fonctions primitives de la même fonction f sur $]2;+\infty[$.

Solution

Pour $x>2$: $F(x)-G(x)=\frac{4x-8}{x-2}=4$. F et G sont dérivables sur $]2;+\infty[$ et diffèrent d'une constante : $F'=G'$, ce sont deux primitives de la même fonction sur $]2;+\infty[$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=3x-1+\frac{2}{x^2}$. Déterminer la primitive F de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 2.

Solution

$F(x)=\frac{3}{2}x^2-x-\frac{2}{x}+C$ et $F(2)=6-2-1+C=3+C=0$, donc $C=-3$: $\boxed{F(x)=\frac{3}{2}x^2-x-\frac{2}{x}-3}$.

Exercice 4

On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x(x^2+1)^3$ et $g(x)=\frac{x^3}{(x^4+2)^2}$.

1 Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\frac{1}{8}(x^2+1)^4$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2 Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \dfrac{-1}{4(x^4+2)}$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

3 En déduire une des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $3f + 2g$.

4 Déterminer la fonction primitive L de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie la condition $L(0) = 2$.

5 Déterminer la fonction primitive K de g sur $\mathbb{R}$ qui vérifie la condition $K(1) = 2$.

✔ Solution

1 $F'(x) = \dfrac{1}{8} \times 4(x^2+1)^3 \times 2x = x(x^2+1)^3 = f(x)$.

2 $G'(x) = -\dfrac{1}{4} \times \dfrac{-4x^3}{(x^4+2)^2} = \dfrac{x^3}{(x^4+2)^2} = g(x)$.

3 $3F + 2G : x \mapsto \dfrac{3}{8}(x^2+1)^4 - \dfrac{1}{2(x^4+2)}$.

4 $L(x) = F(x) + C$ et $L(0) = \frac{1}{8} + C = 2$, donc $L(x) = \dfrac{1}{8}(x^2+1)^4 + \dfrac{15}{8}$.

5 $K(x) = G(x) + C$ et $K(1) = -\frac{1}{12} + C = 2$, donc $K(x) = \dfrac{-1}{4(x^4+2)} + \dfrac{25}{12}$.

Exercice 5

On considère la fonction f définie par : $f(x) = (x-4)\sqrt{3-x}$.

1 Montrer que le domaine de définition de la fonction f est : $\mathcal{D} =]-\infty; 3]$.

2 Montrer que $\forall x \in]-\infty; 3[: f'(x) = \dfrac{10-3x}{2\sqrt{3-x}}$.

3 En déduire les primitives de la fonction g définie sur l'intervalle $]-\infty; 3[$ par : $g(x) = \dfrac{10-3x}{\sqrt{3-x}}$.

✔ Solution

1 $x \in \mathcal{D} \iff 3 - x \geq 0 \iff x \leq 3$.

2 $f'(x) = \sqrt{3-x} + (x-4) \times \dfrac{-1}{2\sqrt{3-x}} = \dfrac{2(3-x)-(x-4)}{2\sqrt{3-x}} = \dfrac{10-3x}{2\sqrt{3-x}}$.

3 $g = 2f'$: les primitives de g sur $]-\infty; 3[$ sont $x \mapsto 2(x-4)\sqrt{3-x} + C$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x}}$.

1 Montrer que le domaine de définition de la fonction f est : $\mathcal{D} =]0; +\infty[$.

2 Montrer que $\forall x \in \mathcal{D} : f'(x) = \dfrac{2x-1}{2x\sqrt{x}}$.

3 Déterminer la fonction primitive G de la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{2x-1}{x\sqrt{x}}$ et qui vérifie $G(1) = 2$.

✔ Solution

1 Il faut $x \geq 0$ et $\sqrt{x} \neq 0$, soit $x > 0$.

2 $f(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, donc $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{2x-1}{2x\sqrt{x}}$.

3 $g = 2f'$, donc $G = 2f + C$; $G(1) = 2 \times 3 + C = 2$, d'où $C = -4$ et $\boxed{G(x) = \dfrac{2(2x+1)}{\sqrt{x}} - 4}$.

Exercice 7

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x\sqrt{x}$.

1. Calculer la dérivée de g sur $]0;+\infty[$.
2. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$. Déduire de la première question une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

Solution

1. $g'(x)=\sqrt{x}+\dfrac{x}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.
2. $f=\dfrac{2}{3}g'$: la fonction $F(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de f.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2x^3-4x^2+2x-3}{(x-1)^2}$.

1. Vérifier que pour tout x de $]1;+\infty[$: $f(x)=2x-\dfrac{3}{(x-1)^2}$.
2. En déduire la primitive F de la fonction f qui vérifie $F(2)=-1$.

Solution

1. $2x-\dfrac{3}{(x-1)^2}=\dfrac{2x(x^2-2x+1)-3}{(x-1)^2}=\dfrac{2x^3-4x^2+2x-3}{(x-1)^2}$.
2. $F(x)=x^2+\dfrac{3}{x-1}+C$; $F(2)=4+3+C=-1$, d'où $C=-8$: $\boxed{F(x)=x^2+\dfrac{3}{x-1}-8}$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-3;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2x^3+13x^2+24x+2}{(x+3)^2}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x\neq -3$: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x+3)^2}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]-3;+\infty[$.

Solution

1. $(ax+b)(x^2+6x+9)+c=ax^3+(6a+b)x^2+(9a+6b)x+9b+c$. Par identification : $a=2$, $6a+b=13\Rightarrow b=1$, $9a+6b=24$ (vérifié), $9b+c=2\Rightarrow c=-7$.

$$f(x)=2x+1-\frac{7}{(x+3)^2}.$$

2. $F(x)=x^2+x+\dfrac{7}{x+3}$.

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $]0;1[$ par : $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que : $f(x)=\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{(x-1)^2}$ pour tout x de $]0;1[$.
2. En déduire la primitive F de f sur $]0;1[$ vérifiant la condition $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=6$.

✔ Solution

1 $\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{(x-1)^2}=\dfrac{(a+b)x^2-2ax+a}{x^2(x-1)^2}$. Identification avec $2x-1$: $a=-1$, $-2a=2$ (vérifié), $a+b=0\Rightarrow b=1$.

$$f(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

2 $F(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}+C$; $F\left(\frac{1}{2}\right)=2+2+C=6$, d'où $C=2$: $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}+2}$.

Exercice 11

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x+2}{(x+1)^4}$.

1 Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x\neq -1$: $f(x)=\dfrac{a}{(x+1)^3}+\dfrac{b}{(x+1)^4}$.

2 En déduire une primitive F de f sur $]-1;+\infty[$.

✔ Solution

1 $x+2=(x+1)+1$, donc $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^3}+\dfrac{1}{(x+1)^4}$: $a=b=1$.

2 $F(x)=-\dfrac{1}{2(x+1)^2}-\dfrac{1}{3(x+1)^3}$.

Exercice 12

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{3x+4}{(x+1)^3}$.

1 Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x\neq -1$: $f(x)=\dfrac{a}{(x+1)^2}+\dfrac{b}{(x+1)^3}$.

2 En déduire une primitive F de f sur $]-1;+\infty[$.

✔ Solution

1 $3x+4=3(x+1)+1$: $a=3$, $b=1$.

2 $F(x)=-\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{2(x+1)^2}$.

Exercice 13

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$.

1 Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x\in]1;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{a}{(x-1)^2}+\dfrac{b}{(x+1)^2}$.

2 En déduire une primitive F de f sur $]1;+\infty[$.

✔ Solution

1 $a(x+1)^2+b(x-1)^2=(a+b)x^2+2(a-b)x+(a+b)$. Identification avec x^2+x+1 : $a+b=1$ et $a-b=\frac{1}{2}$, d'où $a=\dfrac{3}{4}$ et $b=\dfrac{1}{4}$.

2 $F(x)=-\dfrac{3}{4(x-1)}-\dfrac{1}{4(x+1)}$.

Exercice 14

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3+3x}{(x^2-1)^3}$.

1 Montrer que, pour tout x de $]1;+\infty[$: $f(x) = \dfrac{1}{2(x-1)^3} + \dfrac{1}{2(x+1)^3}$.

2 En déduire une primitive F de f sur $]1;+\infty[$.

Solution

1 $\dfrac{1}{2(x-1)^3} + \dfrac{1}{2(x+1)^3} = \dfrac{(x+1)^3+(x-1)^3}{2(x^2-1)^3} = \dfrac{2x^3+6x}{2(x^2-1)^3} = \dfrac{x^3+3x}{(x^2-1)^3}$.

2 $F(x) = -\dfrac{1}{4(x-1)^2} - \dfrac{1}{4(x+1)^2}$.

Exercice 15

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x) = x+1$; $f_2(x) = 3x^2-4x$; $f_3(x) = x^2+2x-1$; $f_4(x) = x^4-4x^3+x^2$;

$f_5(x) = 3x^2-x+2$; $f_6(x) = 5x^7-3x^4+5$; $f_7(x) = 2x^3(x-4)$; $f_8(x) = \dfrac{x^2-2x+6}{3}$.

Solution

$F_1(x) = \dfrac{x^2}{2} + x$

$F_2(x) = x^3 - 2x^2$

$F_3(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^2 - x$

$F_4(x) = \dfrac{x^5}{5} - x^4 + \dfrac{x^3}{3}$

$F_5(x) = x^3 - \dfrac{x^2}{2} + 2x$

$F_6(x) = \dfrac{5}{8}x^8 - \dfrac{3}{5}x^5 + 5x$

$F_7(x) = \dfrac{2}{5}x^5 - 2x^4$ (car $f_7(x) = 2x^4 - 8x^3$)

$F_8(x) = \dfrac{x^3}{9} - \dfrac{x^2}{3} + 2x$

Exercice 16

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x) = -\dfrac{3}{x^2}$; $f_2(x) = \dfrac{2}{x^3}$; $f_3(x) = \dfrac{1}{x^5}$; $f_4(x) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{4}{x^5}$;

$f_5(x) = \dfrac{7}{x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^3}$; $f_6(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^4}$; $f_7(x) = \dfrac{2(x^4-1)}{x^3}$; $f_8(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$.

Solution

Sur $]0;+\infty[$:

$F_1(x) = \dfrac{3}{x}$

$F_2(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$F_3(x) = -\dfrac{1}{4x^4}$

$F_4(x) = -\dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{x^4}$

$F_5(x) = -\dfrac{7}{x} - \sqrt{x} - \dfrac{1}{2x^2}$

$F_6(x) = -\dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{3x^3}$ (car $f_6 = \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}$)

$F_7(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ (car $f_7 = 2x - \frac{2}{x^3}$)

$F_8(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2x - \dfrac{1}{x}$ (car $f_8 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$)

Exercice 17

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x) = (x+3)^2$; $f_2(x) = 2x(1+x^2)^3$; $f_3(x) = x^2(x^3-5)^8$;

$f_4(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)^3$; $f_5(x) = x^2\sin(1+x^3)$; $f_6(x) = \sin x \cdot \cos x$;

$f_7(x) = \sin(2x-1)\cdot\cos^4(2x-1)$; $f_8(x) = \dfrac{1+\tan x}{\cos^2 x}$; $f_9(x) = x(x+1)^{2022}$.

Solution

- $F_1(x) = \dfrac{(x+3)^3}{3}$; $F_2(x) = \dfrac{(1+x^2)^4}{4}$; $F_3(x) = \dfrac{(x^3-5)^9}{27}$ ($f_3 = \frac{1}{3}u'u^8$, $u = x^3-5$).
- $u(x) = \frac{1}{x}-1$, $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$: $f_4 = -u'u^3$, d'où $F_4(x) = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)^4$ (sur $]0;+\infty[$).
- $f_5 = \frac{1}{3}u'\sin u$ avec $u = 1+x^3$: $F_5(x) = -\dfrac{1}{3}\cos(1+x^3)$; $F_6(x) = \dfrac{\sin^2 x}{2}$.
- $u = \cos(2x-1)$, $u' = -2\sin(2x-1)$: $f_7 = -\frac{1}{2}u'u^4$, d'où $F_7(x) = -\dfrac{\cos^5(2x-1)}{10}$.
- $u = \tan x$, $u' = \frac{1}{\cos^2 x}$: $f_8 = u'(1+u)$, d'où $F_8(x) = \tan x + \dfrac{\tan^2 x}{2}$ (sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$).
- $f_9(x) = \big((x+1)-1\big)(x+1)^{2022} = (x+1)^{2023} - (x+1)^{2022}$: $F_9(x) = \dfrac{(x+1)^{2024}}{2024} - \dfrac{(x+1)^{2023}}{2023}$.

Exercice 18

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2}$; $f_2(x) = \dfrac{2x-1}{(x^2-x+3)^2}$; $f_3(x) = \dfrac{3}{(2x-5)^7}$;

$f_4(x) = \dfrac{x-1}{(x^2-2x-3)^5}$; $f_5(x) = \dfrac{4x^2}{(x^3-8)^3}$; $f_6(x) = \dfrac{3x^2-7x}{(2x^3-7x^2+9)^6}$;

$f_7(x) = \dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^3}$.

Solution

Sur tout intervalle où le dénominateur ne s'annule pas :

- $F_1(x) = -\dfrac{1}{x+3}$; $F_2(x) = -\dfrac{1}{x^2-x+3}$ ($f_2 = \frac{u'}{u^2}$).
- $f_3 = \frac{3}{2}\times 2(2x-5)^{-7}$: $F_3(x) = \dfrac{3}{2}\times\dfrac{(2x-5)^{-6}}{-6} = -\dfrac{1}{4(2x-5)^6}$.
- $u = x^2-2x-3$, $u' = 2(x-1)$: $f_4 = \frac{1}{2}u'u^{-5}$, d'où $F_4(x) = -\dfrac{1}{8(x^2-2x-3)^4}$.
- $u = x^3-8$, $u' = 3x^2$: $f_5 = \frac{4}{3}u'u^{-3}$, d'où $F_5(x) = -\dfrac{2}{3(x^3-8)^2}$.
- $u = 2x^3-7x^2+9$, $u' = 2(3x^2-7x)$: $f_6 = \frac{1}{2}u'u^{-6}$, d'où $F_6(x) = -\dfrac{1}{10(2x^3-7x^2+9)^5}$.
- $u = 1+\cos x$, $u' = -\sin x$: $f_7 = -u'u^{-3}$, d'où $F_7(x) = \dfrac{1}{2(1+\cos x)^2}$.

Exercice 19

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$; $f_2(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$; $f_3(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$;

$f_4(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$; $f_5(x)=\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^3-3x^2}}$; $f_6(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$;

$f_7(x)=x\sqrt{x^2+1}$; $f_8(x)=\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{1+3x}{x}}$; $f_9(x)=\sqrt[3]{x+1}$;

$f_{10}(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+6}}$; $f_{11}(x)=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; $f_{12}(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$.

Solution

Sur tout intervalle où l'expression est définie :

- $F_1(x)=4\sqrt{x}$; $F_2(x)=-2\sqrt{1-x}$; $F_3(x)=\sqrt{x^2+3}$; $F_4(x)=-3\sqrt{1-x^2}$.
- $u=x^3-3x^2$, $u'=3(x^2-2x)$: $f_5=\frac{1}{3}\frac{u'}{\sqrt{u}}$, d'où $F_5(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3-3x^2}$.
- $u=x^2-2x+2$, $u'=-2(1-x)$: $f_6=-\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$, d'où $F_6(x)=-\sqrt{x^2-2x+2}$.
- $F_7(x)=\dfrac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$ ($f_7=\frac{1}{2}u'\sqrt{u}$, $u=x^2+1$).
- $u=\frac{1}{x}+3=\frac{1+3x}{x}$, $u'=-\frac{1}{x^2}$: $f_8=-u'\sqrt{u}$, d'où $F_8(x)=-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1+3x}{x}\right)\sqrt{\dfrac{1+3x}{x}}$.
- $F_9(x)=\dfrac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1}$ (sur $]-1;+\infty[$) ; $F_{10}(x)=\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+6)^2}$ ($f_{10}=\frac{1}{2}u'u^{-\frac{1}{3}}$).
- $u=\sqrt{x}$, $u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$: $f_{11}=2u'\cos u$, d'où $F_{11}(x)=2\sin\sqrt{x}$.
- $f_{12}=\dfrac{(x-1)+2}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}+\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$: $F_{12}(x)=\dfrac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+4\sqrt{x-1}$.

Exercice 20

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\cos x\cdot\cos(3x)$ et $g(x)=\sin x\cdot\sin(3x)$.

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions $f+g$ et $f-g$.
2. En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions f et g.

Solution

1. $f+g=\cos(3x-x)=\cos(2x)$: primitive $\dfrac{\sin(2x)}{2}$. $f-g=\cos(3x+x)=\cos(4x)$: primitive $\dfrac{\sin(4x)}{4}$.
2. $f=\frac{1}{2}\big[(f+g)+(f-g)\big]$ et $g=\frac{1}{2}\big[(f+g)-(f-g)\big]$:

$$F(x)=\frac{\sin(2x)}{4}+\frac{\sin(4x)}{8}+C \quad ; \quad G(x)=\frac{\sin(2x)}{4}-\frac{\sin(4x)}{8}+C.$$

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x\sin x$.

1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x : $f(x)=2\cos x-f''(x)$.
2. En déduire la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en π.

✔ Solution

1 f est un produit de fonctions deux fois dérivables. $f'(x) = \sin x + x\cos x$ et $f''(x) = 2\cos x - x\sin x$, donc $f(x) = 2\cos x - f''(x)$.

2 Une primitive de f est $2\sin x - f'(x) = \sin x - x\cos x$. Donc $F(x) = \sin x - x\cos x + C$; $F(\pi) = 0 + \pi + C = 0$: $\boxed{F(x) = \sin x - x\cos x - \pi}$.

Exercice 22

Soient les fonctions $f : x \mapsto x\cos x$ et $g : x \mapsto x\sin x$.

1 En calculant $f'(x) + g(x)$, trouver une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

2 En procédant de même, déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

✔ Solution

1 $f'(x) = \cos x - x\sin x$, donc $f'(x) + g(x) = \cos x$ et $g = \cos - f'$: $G(x) = \sin x - x\cos x$.

2 $g'(x) = \sin x + x\cos x = \sin x + f(x)$, donc $f = g' - \sin$: $F(x) = x\sin x + \cos x$.

Exercice 23

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{(x+1)^4}$. On se propose de déterminer des réels a, b, c et d tels que, pour tout x de $]-1;+\infty[$:

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3} + \frac{d}{(x+1)^4}.$$

1 a) Calculer $\lim\limits_{x\to -1^+}(x+1)^4 f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)f(x)$.

b) En déduire que $d = 3$ et $a = 0$.

2 a) Vérifier que pour tout réel x de $]-1;+\infty[$: $\dfrac{x-1-c}{(x+1)^3} = \dfrac{b}{(x+1)^2}$.

b) En déduire les valeurs des réels b et c.

3 Déterminer la primitive de f sur $]-1;+\infty[$ égale à 2 en 0.

✔ Solution

1 a) $(x+1)^4 f(x) = x^2+2 \xrightarrow[x\to -1]{} 3$; $(x+1)f(x) = \dfrac{x^2+2}{(x+1)^3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

b) Avec la décomposition : $(x+1)^4 f(x) = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d \to d$, donc $d = 3$; et $(x+1)f(x) = a + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2} + \dfrac{d}{(x+1)^3} \to a$, donc $a = 0$.

2 a) $f(x) - \dfrac{3}{(x+1)^4} = \dfrac{x^2-1}{(x+1)^4} = \dfrac{x-1}{(x+1)^3}$ et cette quantité vaut $\dfrac{b}{(x+1)^2} + \dfrac{c}{(x+1)^3}$; en retranchant $\dfrac{c}{(x+1)^3}$: $\dfrac{x-1-c}{(x+1)^3} = \dfrac{b}{(x+1)^2}$.

b) On en tire $x - 1 - c = b(x+1)$ pour tout x : $b = 1$ et $-1 - c = 1$, soit $c = -2$. Vérification : $(x+1)^2 - 2(x+1) + 3 = x^2 + 2$.

3 $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{2}{(x+1)^3} + \dfrac{3}{(x+1)^4}$, donc $F(x) = -\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{(x+1)^3} + C$. $F(0) = -1 + 1 - 1 + C = 2$, d'où $C = 3$.

Exercice 24

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Soit F la primitive de f sur $[0;1]$ qui s'annule en 0, et g la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x)=F(\cos x)$.

1. Montrer que g est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et déterminer sa fonction dérivée.
2. En déduire que pour tout x de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$: $g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{\pi}{4}$.
3. Calculer $F(1)$ et $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Solution

1. $\cos$ est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ à valeurs dans $[0;1]$, et F est dérivable sur $[0;1]$: $g=F\circ\cos$ est dérivable et
$$g'(x)=-\sin x\,F'(\cos x)=-\sin x\sqrt{1-\cos^2 x}=-\sin x\,|\sin x|=-\sin^2 x \quad (\sin x\geq 0).$$
2. $-\sin^2 x=-\frac{1-\cos(2x)}{2}$, donc $g(x)=-\frac{x}{2}+\frac{\sin(2x)}{4}+C$. Or $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=F(0)=0$: $-\frac{\pi}{4}+0+C=0$, d'où $C=\frac{\pi}{4}$.
3. $F(1)=g(0)=\frac{\pi}{4}$; $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=g\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$.

Exercice 25

Déterminer toutes les fonctions f deux fois dérivables sur I telles que :

1. $f''(x)=0$; $I=\mathbb{R}$.
2. $f''(x)=\sin x$; $I=\mathbb{R}$.

Solution

(a et b sont des réels quelconques.)

1. $f'(x)=a$, puis $f(x)=ax+b$.
2. $f'(x)=-\cos x+a$, puis $f(x)=-\sin x+ax+b$.

Exercice 26

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

1. Exprimer $\sqrt{x^2+1}$ à l'aide de $u(x)$ et $u'(x)$.
2. Déterminer des primitives pour chacune des fonctions :
$$f:x\mapsto\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}} \qquad g:x\mapsto\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

Solution

1. $u'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{u(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ (et $u(x)>0$), donc $\sqrt{x^2+1}=\frac{u(x)}{u'(x)}$.
2. $f=\frac{1}{u\cdot\frac{u}{u'}}=\frac{u'}{u^2}$: primitive $F(x)=-\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$.
$g=u^2\cdot\frac{u'}{u}=u'u$: primitive $G(x)=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2$.

Exercice 27

Pour tout entier naturel n supérieur à 2, on considère la fonction P_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}.$$

1 Déterminer la primitive F_n de P_n sur $\mathbb{R}$ égale à 1 en 0.

2 En déduire une autre expression de $P_n(x)$.

✔ Solution

1 $F_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ (car $F_n(0) = 1$). Pour $x \neq 1$: $F_n(x) = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

2 $P_n = F_n'$: pour $x \neq 1$,

$$P_n(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} \; ; \qquad P_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$