CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 12

2BAC PC & SVT

Calcul des probabilités

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Rappels. Tirage successif avec remise de p objets parmi n : n^p ; successif sans remise : A_n^p ; simultané : C_n^p. Loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$: $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, $E(X)=np$, $V(X)=np(1-p)$.

Exercice 1

Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules vertes et une boule jaune. On tire au hasard **successivement et avec remise** 2 boules. 1. Déterminer le nombre de tirages possibles. 2. Calculer la probabilité de : A : « deux boules rouges » ; B : « 2 boules jaunes » ; C : « 2 boules de même couleur » ; D : « 2 boules de couleurs différentes » ; E : « au moins une boule rouge » ; F : « au plus une boule verte ».

✔ Solution

1. $\operatorname{card}\Omega = 6^2 = 36$.

2. $P(A)=\dfrac{3^2}{36}=\dfrac{1}{4}$; $P(B)=\dfrac{1}{36}$; $P(C)=\dfrac{9+4+1}{36}=\dfrac{7}{18}$; $P(D)=1-P(C)=\dfrac{11}{18}$;

$P(E)=1-P(\text{aucune rouge})=1-\dfrac{3^2}{36}=\dfrac{3}{4}$; $P(F)=1-P(\text{deux vertes})=1-\dfrac{4}{36}=\dfrac{8}{9}$.

Exercice 2

Un sac contient : 3 boules vertes numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 boules noires numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 2 boules rouges numérotées 1 ; 2. On tire au hasard **successivement et sans remise** 3 boules. 1. Nombre de tirages possibles. 2. Probabilité de : A : « 3 boules noires » ; B : « 3 boules de même couleur » ; C : « 3 boules portant le même numéro » ; D : « 3 nombres pairs » ; E : « au moins une boule noire » ; F : « une boule de chaque couleur » ; G : « deux boules vertes exactement » ; H : « une boule de chaque couleur, portant le même numéro » ; I : « la somme des nombres vaut 6 » ; J : « le produit des numéros vaut 12 ».

✔ Solution

1. $\operatorname{card}\Omega = A_9^3 = 9\times 8\times 7 = 504$.

2. On compte les combinaisons favorables puis on multiplie par $3!=6$ (ordres possibles) quand c'est commode.

- $P(A)=\dfrac{A_4^3}{504}=\dfrac{24}{504}=\dfrac{1}{21}$; $P(B)=\dfrac{A_4^3+A_3^3}{504}=\dfrac{30}{504}=\dfrac{5}{84}$.
- C : numéro 1 (3 boules) ou numéro 2 (3 boules), le numéro 3 n'a que 2 boules : $P(C)=\dfrac{2\times 3!}{504}=\dfrac{1}{42}$.
- D : boules paires : V_2, N_2, N_4, R_2 : $P(D)=\dfrac{A_4^3}{504}=\dfrac{1}{21}$; $P(E)=1-\dfrac{A_5^3}{504}=1-\dfrac{60}{504}=\dfrac{37}{42}$.
- $P(F)=\dfrac{3\times 4\times 2\times 3!}{504}=\dfrac{144}{504}=\dfrac{2}{7}$; $P(G)=\dfrac{C_3^2\times A_3^2\times 6}{504}=\dfrac{108}{504}=\dfrac{3}{14}$ (place de la non-verte, 2 vertes ordonnées, 6 non-vertes).
- H : $\{V_1,N_1,R_1\}$ ou $\{V_2,N_2,R_2\}$: $P(H)=\dfrac{2\times 6}{504}=\dfrac{1}{42}$.
- I : numéros disponibles : 1 (3 boules), 2 (3), 3 (2), 4 (1). Somme 6 : $\{1,1,4\}$: $C_3^2\times 1=3$; $\{1,2,3\}$: $3\times 3\times 2=18$; $\{2,2,2\}$: 1. Soit 22 combinaisons : $P(I)=\dfrac{22\times 6}{504}=\dfrac{11}{42}$.
- J : produit 12 : $\{1,3,4\}$: $3\times 2\times 1=6$; $\{2,2,3\}$: $C_3^2\times 2=6$. Soit 12 combinaisons : $P(J)=\dfrac{72}{504}=\dfrac{1}{7}$.

Exercice 3

Une urne contient 3 boules blanches, 4 rouges et 2 vertes. On tire **simultanément** 3 boules. 1. Nombre de tirages. 2. Probabilité de : A : « 3 rouges » ; B : « 3 de même couleur » ; C : « une de chaque couleur » ; D : « au moins une rouge » ; E : « au plus une rouge » ; F : « deux boules exactement de même couleur ».

Solution

1. $\operatorname{card}\Omega = C_9^3 = 84$.

2. $P(A) = \dfrac{C_4^3}{84} = \dfrac{1}{21}$; $P(B) = \dfrac{C_4^3 + C_3^3}{84} = \dfrac{5}{84}$; $P(C) = \dfrac{3\times 4\times 2}{84} = \dfrac{2}{7}$; $P(D) = 1 - \dfrac{C_5^3}{84} = \dfrac{37}{42}$; $P(E) = \dfrac{C_5^3 + 4\,C_5^2}{84} = \dfrac{50}{84} = \dfrac{25}{42}$; F est le contraire de $B \cup C$: $P(F) = 1 - \dfrac{5+24}{84} = \dfrac{55}{84}$.

Exercice 4

Un sac contient 12 jetons : 3 blancs numérotés 1 ; 1 ; 2 ; 4 rouges numérotés 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 5 verts numérotés 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3. On tire **simultanément** 4 jetons. 1. Nombre de tirages. 2. Probabilité de : A : « 4 jetons de même couleur » ; B : « un seul jeton rouge » ; C : « exactement deux jetons verts numérotés 2 » ; D : « 4 jetons portant le même numéro » ; E : « un seul jeton rouge et un seul nombre impair ».

Solution

1. $\operatorname{card}\Omega = C_{12}^4 = 495$.

- $P(A) = \dfrac{C_4^4 + C_5^4}{495} = \dfrac{6}{495} = \dfrac{2}{165}$; $P(B) = \dfrac{4\,C_8^3}{495} = \dfrac{224}{495}$; $P(C) = \dfrac{C_3^2\,C_9^2}{495} = \dfrac{108}{495} = \dfrac{12}{55}$.
- D : numéro 1 : 5 jetons, numéro 2 : 6 jetons : $P(D) = \dfrac{C_5^4 + C_6^4}{495} = \dfrac{20}{495} = \dfrac{4}{99}$.
- E : rouges impairs : 2, rouges pairs : 2 ; non-rouges impairs : 4 $(1,1,1,3)$, non-rouges pairs : 4. Rouge impair et 3 non-rouges pairs : $2 \times C_4^3 = 8$; rouge pair, 1 non-rouge impair et 2 non-rouges pairs : $2 \times 4 \times C_4^2 = 48$.
  $P(E) = \dfrac{56}{495}$.

Exercice 5

Une urne contient 8 boules : 4 rouges numérotées 1 ; 1 ; 2 ; 2 et 4 vertes numérotées 1 ; 1 ; 2 ; 2. On tire **simultanément** 2 boules. 1. Nombre de tirages. 2. Probabilité de : R : « deux boules rouges » ; R_1 : « deux rouges sachant que l'une d'elles porte le numéro 2 » ; V_1 : « deux vertes sachant que l'une d'elles est verte et porte le numéro 1 ».

Solution

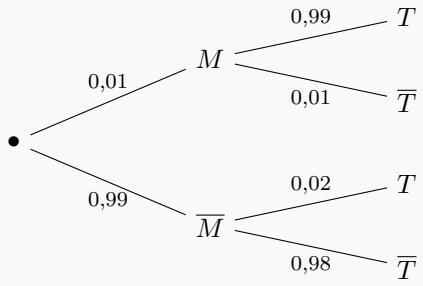
1. $\operatorname{card}\Omega = C_8^2 = 28$. 2. $P(R) = \dfrac{C_4^2}{28} = \dfrac{3}{14}$.

- Soit K : « au moins une boule porte le 2 » : $\operatorname{card} K = 28 - C_4^2 = 22$; $\operatorname{card}(R \cap K) = C_4^2 - 1 = 5$ (on retire la paire rouge $\{1,1\}$) : $P(R_1) = P_K(R) = \dfrac{5}{22}$.
- Soit L : « au moins une boule verte numérotée 1 » : $\operatorname{card} L = 28 - C_6^2 = 13$; deux vertes dont au moins une $V1$: $C_4^2 - C_2^2 = 5$: $P(V_1) = \dfrac{5}{13}$.

Exercice 6

Une maladie atteint 1 % d'une population. Chez les malades, 99 % des tests sont positifs ; chez les non malades, 98 % des tests sont négatifs. T : « le test est positif », M : « l'individu est malade ». 1. Construire un arbre pondéré. 2. Calculer $P(\overline{M})$, $P_M(\overline{T})$ et $P_{\overline{M}}(T)$. 3. Calculer $P(T \cap M)$ et $P(\overline{M} \cap T)$, puis $P(T)$. 4. Sachant que le test est positif, probabilité que l'individu soit malade ?

✔ Solution

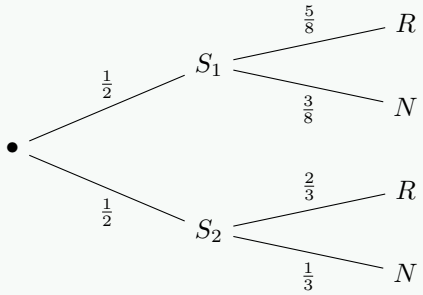


2. $P(\overline{M}) = 0{,}99$; $P_M(\overline{T}) = 0{,}01$; $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}02$.
3. $P(T \cap M) = 0{,}01 \times 0{,}99 = 0{,}0099$; $P(\overline{M} \cap T) = 0{,}99 \times 0{,}02 = 0{,}0198$; $P(T) = 0{,}0297$ (probabilités totales).
4. $P_T(M) = \dfrac{0{,}0099}{0{,}0297} = \dfrac{1}{3}$: malgré un test fiable, seul un positif sur trois est malade (maladie rare).

Exercice 7

Un sac S_1 contient 5 boules rouges et 3 noires ; un sac S_2 contient 2 rouges et une noire. On choisit un sac au hasard (équiprobabilité), puis on tire une boule. 1. Arbre pondéré. 2. Probabilité de choisir S_2 et d'obtenir une rouge. 3. Probabilité d'obtenir une rouge. 4. Sachant que la boule est noire, probabilité qu'elle provienne de S_1 ?

✔ Solution



2. $P(S_2 \cap R) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$. 3. $P(R) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{8} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{16} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{31}{48}$.
4. $P(N) = \dfrac{17}{48}$ et $P(S_1 \cap N) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{16}$: $P_N(S_1) = \dfrac{3/16}{17/48} = \dfrac{9}{17}$.

Exercice 8

Un sac contient 7 boules : 4 rouges numérotées 1 ; 1 ; 2 ; 3 et 3 vertes numérotées 1 ; 2 ; 3. On tire **successivement et sans remise** 2 boules. A : « deux boules de même couleur » ; B : « deux boules de couleurs différentes ». 1. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$. 2. A et B sont-ils indépendants ? 3. Sachant B réalisé, probabilité d'obtenir deux boules de même numéro ?

✔ Solution

1. $\operatorname{card} \Omega = A_7^2 = 42$; $P(A) = \dfrac{4 \times 3 + 3 \times 2}{42} = \dfrac{3}{7}$; $P(B) = 1 - P(A) = \dfrac{4}{7}$; $A \cap B = \varnothing$: $P(A \cap B) = 0$.
2. $P(A)P(B) = \dfrac{12}{49} \neq 0$: A et B ne sont pas indépendants.
3. Paires (rouge, verte) de même numéro : $\{R1, V1\}$ (2 façons), $\{R2, V2\}$, $\{R3, V3\}$: 4 paires, soit 8 tirages ordonnés ; $\operatorname{card} B = 24$. La probabilité cherchée vaut $\dfrac{8}{24} = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 9

Un sac contient 5 boules rouges numérotées 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 et 4 vertes numérotées 0 ; 1 ; 1 ; 2. On tire **simultanément** 3 boules. 1. A : « 3 numéros pairs » ; B : « somme des numéros égale à 3 » ; C : « 3 boules vertes ». a) Montrer que $P(A)=\frac{1}{21}$ et $P(B)=\frac{5}{14}$. b) Montrer que $P(B\cap C)=\frac{1}{42}$, puis $P_B(C)=\frac{1}{15}$. 2. X : produit des numéros. a) Justifier $X(\Omega)=\{0;1;2;4\}$. b) Montrer que $P(X=0)=\frac{7}{12}$. c) Calculer $P(X=1)$ et la loi de X. d) Espérance et variance de X.

✔ Solution

$\operatorname{card}\Omega=C_9^3=84$. Numéros : 0 (2 boules), 1 (5 boules), 2 (2 boules).

1 a) Boules paires : $0,0,2,2$: $P(A)=\dfrac{C_4^3}{84}=\dfrac{1}{21}$. Somme 3 : $\{0,1,2\}$: $2\times5\times2=20$; $\{1,1,1\}$: $C_5^3=10$: $P(B)=\dfrac{30}{84}=\dfrac{5}{14}$.

b) Vertes : $0,1,1,2$; somme 3 : $\{0,1,2\}$: $1\times2\times1=2$: $P(B\cap C)=\dfrac{2}{84}=\dfrac{1}{42}$; $P_B(C)=\dfrac{1/42}{5/14}=\dfrac{1}{15}$.

2 a) Un 0 donne 0 ; sinon les numéros sont parmi $1,1,1,1,1,2,2$: produits 1, 2 ou 4 (le produit 8 exigerait trois boules « 2 », il n'y en a que deux).

b) $P(X=0)=1-\dfrac{C_7^3}{84}=1-\dfrac{35}{84}=\dfrac{7}{12}$.

c) $P(X=1)=\dfrac{C_5^3}{84}=\dfrac{5}{42}$; $P(X=2)=\dfrac{C_5^2\times2}{84}=\dfrac{5}{21}$; $P(X=4)=\dfrac{5\times C_2^2}{84}=\dfrac{5}{84}$.

x_i	0	1	2	4
$P(X=x_i)$	$\frac{49}{84}$	$\frac{10}{84}$	$\frac{20}{84}$	$\frac{5}{84}$

d) $E(X)=\dfrac{10+40+20}{84}=\dfrac{5}{6}$; $E(X^2)=\dfrac{10+80+80}{84}=\dfrac{85}{42}$; $V(X)=\dfrac{85}{42}-\dfrac{25}{36}=\dfrac{335}{252}$.

Exercice 10

Un sac contient 3 boules rouges, 4 noires et 3 blanches. On tire **simultanément** 3 boules. 1. Probabilité de A : « 3 boules de même couleur » et B : « au moins une blanche ». 2. X : nombre de boules blanches. a) Justifier $X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$. b) Loi de X. 3. On répète l'épreuve 4 fois avec remise. Probabilité que A soit réalisé exactement 3 fois.

✔ Solution

$\operatorname{card}\Omega=C_{10}^3=120$.

1. $P(A)=\dfrac{C_3^3+C_4^3+C_3^3}{120}=\dfrac{6}{120}=\dfrac{1}{20}$; $P(B)=1-\dfrac{C_7^3}{120}=1-\dfrac{35}{120}=\dfrac{17}{24}$.

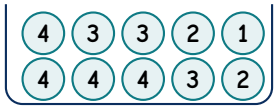
2. a) On peut tirer de 0 à 3 blanches (il y en a 3 et 7 non blanches). b)

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{C_7^3}{120}=\frac{35}{120}$	$\frac{3C_7^2}{120}=\frac{63}{120}$	$\frac{C_3^2\times7}{120}=\frac{21}{120}$	$\frac{1}{120}$

3. Le nombre de réalisations de A suit $\mathcal{B}\left(4;\frac{1}{20}\right)$: $C_4^3\left(\dfrac{1}{20}\right)^3\dfrac{19}{20}=\dfrac{76}{160\,000}=\dfrac{19}{40\,000}$.

Exercice 11

Une urne contient 10 boules numérotées 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4.



On tire **successivement et sans remise** deux boules. 1. A : « deux numéros pairs ». Montrer que $P(A)=\frac{1}{3}$. 2. On répète l'expérience 3 fois avec remise ; X : nombre de réalisations de A. Montrer que $P(X=1)=\frac{4}{9}$, puis donner la loi de X.

Solution

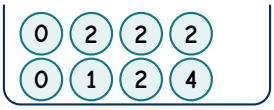
1. Boules paires : $2,2,4,4,4,4$ (six) : $P(A)=\dfrac{A_6^2}{A_{10}^2}=\dfrac{30}{90}=\dfrac{1}{3}$.

2. $X\hookrightarrow\mathcal{B}\left(3;\frac{1}{3}\right)$: $P(X=k)=C_3^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$; $P(X=1)=3\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{4}{9}$.

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

Exercice 12

Une urne contient 8 boules numérotées comme ci-dessous. On tire **simultanément** 3 boules.



1. A : « aucune boule ne porte 0 » ; B : « le produit vaut 8 ». Montrer que $P(A)=\frac{5}{14}$ et $P(B)=\frac{1}{7}$. 2. X : produit des trois numéros. a) Montrer que $P(X=16)=\frac{3}{28}$. b) Compléter le tableau de la loi de X ($x_i\in\{0;4;8;16\}$).

Solution

$\operatorname{card}\Omega=C_8^3=56$; numéros : $0,0,1,2,2,2,2,4$.

1. $P(A)=\dfrac{C_6^3}{56}=\dfrac{20}{56}=\dfrac{5}{14}$; produit 8 : $\{1,2,4\}$: 4 ; $\{2,2,2\}$: $C_4^3=4$: $P(B)=\dfrac{8}{56}=\dfrac{1}{7}$.

2. a) Produit 16 : $\{2,2,4\}$: $C_4^2\times 1=6$: $P(X=16)=\dfrac{6}{56}=\dfrac{3}{28}$.

b) $P(X=0)=1-P(A)=\dfrac{9}{14}$; produit 4 : $\{1,2,2\}$: $C_4^2=6$, $P(X=4)=\dfrac{3}{28}$; $P(X=8)=P(B)=\dfrac{1}{7}$.

x_i	0	4	8	16
$P(X=x_i)$	$\frac{9}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$

Exercice 13

Une urne contient 9 boules : 5 rouges numérotées 2 ; 2 ; 2 ; 1 ; 1 et 4 blanches numérotées 2 ; 2 ; 2 ; 1. On tire **simultanément** 3 boules. A : « même couleur » ; B : « même numéro » ; C : « même numéro et même couleur ». 1. Montrer que $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{1}{4}$ et $P(C)=\frac{1}{42}$. 2. On répète l'expérience 3 fois avec remise ; X : nombre de réalisations de A. a) Paramètres de la loi binomiale X. b) Montrer que $P(X=1)=\frac{25}{72}$ puis calculer $P(X=2)$.

Solution

$\operatorname{card}\Omega=C_9^3=84$.

1. $P(A)=\dfrac{C_5^3+C_4^3}{84}=\dfrac{14}{84}=\dfrac{1}{6}$; numéro 2 : 6 boules, numéro 1 : 3 boules : $P(B)=\dfrac{C_6^3+C_3^3}{84}=\dfrac{21}{84}=\dfrac{1}{4}$;

C : trois rouges « 2 » ou trois blanches « 2 » : $P(C)=\dfrac{1+1}{84}=\dfrac{1}{42}$.

2. a) $X\hookrightarrow\mathcal{B}\left(3;\frac{1}{6}\right)$. b) $P(X=1)=3\times\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{5}{6}\right)^2=\dfrac{75}{216}=\dfrac{25}{72}$; $P(X=2)=3\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\times\dfrac{5}{6}=$

$\dfrac{15}{216} = \dfrac{5}{72}$.

Exercice 14

Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. 1. On tire **simultanément** 3 boules. a) Probabilités de A : « même couleur » et B : « au moins une blanche ». b) Montrer que $P_B(A) = \frac{2}{17}$. A et B sont-ils indépendants ? 2. On tire une boule : si elle est blanche, on la met de côté ; si elle est noire, on la remet ; puis on tire une deuxième boule. X : nombre de boules noires restant dans l'urne. a) Valeurs de X. b) Montrer que $P(X=2) = \frac{23}{49}$. c) Loi de X. d) $E(X)$ et $V(X)$.

Solution

1 a) $\operatorname{card}\Omega = C_7^3 = 35$; $P(A) = \dfrac{C_4^3 + C_3^3}{35} = \dfrac{5}{35} = \dfrac{1}{7}$; $P(B) = 1 - \dfrac{C_3^3}{35} = \dfrac{34}{35}$.

b) $A \cap B$: « 3 blanches » : $P(A \cap B) = \dfrac{4}{35}$, d'où $P_B(A) = \dfrac{4}{34} = \dfrac{2}{17} \neq P(A) = \dfrac{1}{7}$: A et B ne sont pas indépendants.

2 La deuxième boule tirée est retirée de l'urne. a) Si la 2e boule est noire, il reste 2 noires ; sinon 3 : $X(\Omega) = \{2;3\}$.

b) $X=2$: (B,N) avec probabilité $\frac{4}{7}\times\frac{3}{6} = \frac{2}{7}$, ou (N,N) avec $\frac{3}{7}\times\frac{3}{7} = \frac{9}{49}$: $P(X=2) = \dfrac{14}{49} + \dfrac{9}{49} = \dfrac{23}{49}$.

c) $P(X=3) = 1 - \dfrac{23}{49} = \dfrac{26}{49}$.

d) $E(X) = \dfrac{2\times 23 + 3\times 26}{49} = \dfrac{124}{49}$; $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{326}{49} - \dfrac{15\,376}{2401} = \dfrac{598}{2401}$.

Exercice 15

Un sac contient 6 jetons numérotés 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2. On tire **successivement et sans remise** 3 jetons. A : « la somme vaut 3 » ; B : « le premier jeton porte 2 ». 1. a) Montrer que $P(A) = \frac{1}{5}$ et $P(B) = \frac{1}{3}$. b) Calculer $P_B(A)$; A et B sont-ils indépendants ? 2. X : somme des numéros. a) Loi de X. b) $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Solution

$\operatorname{card}\Omega = A_6^3 = 120$.

1 a) A : trois « 1 » : $P(A) = \dfrac{A_4^3}{120} = \dfrac{24}{120} = \dfrac{1}{5}$; $P(B) = \dfrac{2\times 5\times 4}{120} = \dfrac{1}{3}$.

b) Si le premier jeton porte 2, la somme est au moins 4 : $P_B(A) = 0 \neq P(A)$: non indépendants.

2 a) $X(\Omega) = \{3;4;5\}$; $P(X=4)$: un « 2 » parmi trois places : $\dfrac{3\times 2\times 4\times 3}{120} = \dfrac{3}{5}$; $P(X=5) = \dfrac{3\times 2\times 1\times 4}{120} = \dfrac{1}{5}$.

x_i	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

b) $E(X) = \dfrac{3+12+5}{5} = 4$; $V(X) = \dfrac{(3-4)^2 + 0 + (5-4)^2}{5} = \dfrac{2}{5}$; $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{2}{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Exercice 16

Un sac contient 5 boules blanches numérotées 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 2 et 3 rouges numérotées 0 ; 1 ; 3. On tire **simultanément** 3 boules. 1. X : nombre de boules blanches. a) Loi de X. b) Espérance et variance. c) Probabilité d'au moins une blanche. 2. Y : produit des numéros. a) Justifier $Y(\Omega) = \{0;1;2;3;6\}$. b) Loi de Y. c) Espérance et écart-type. d) Probabilités de A : « $Y \geq 2$ » ; B : « $Y \leq 3$ » ; C : « $1 < Y < 5$ ».

✔ Solution

$\text{card}\,\Omega = C_8^3 = 56$.

1 a)

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{C_3^3}{56} = \frac{1}{56}$	$\frac{5C_3^2}{56} = \frac{15}{56}$	$\frac{3C_5^2}{56} = \frac{30}{56}$	$\frac{C_5^3}{56} = \frac{10}{56}$

b) $E(X) = \dfrac{15+60+30}{56} = \dfrac{15}{8}$; $V(X) = \dfrac{15+120+90}{56} - \dfrac{225}{64} = \dfrac{225}{448}$. c) $1 - \dfrac{1}{56} = \dfrac{55}{56}$.

2 a) Trois boules portent 0 ; les cinq autres portent $1,1,1,2,3$. Produits possibles sans 0 : $1\cdot1\cdot1=1$, $1\cdot1\cdot2=2$, $1\cdot1\cdot3=3$, $1\cdot2\cdot3=6$.

b) $P(Y=1) = \dfrac{1}{56}$, $P(Y=2) = \dfrac{C_3^2}{56} = \dfrac{3}{56}$, $P(Y=3) = \dfrac{3}{56}$, $P(Y=6) = \dfrac{3}{56}$, $P(Y=0) = 1 - \dfrac{C_5^3}{56} = \dfrac{46}{56} = \dfrac{23}{28}$.

c) $E(Y) = \dfrac{1+6+9+18}{56} = \dfrac{17}{28}$; $E(Y^2) = \dfrac{1+12+27+108}{56} = \dfrac{37}{14}$; $V(Y) = \dfrac{37}{14} - \dfrac{289}{784} = \dfrac{1783}{784}$; $\sigma(Y) = \dfrac{\sqrt{1783}}{28} \approx 1{,}51$.

d) $P(A) = \dfrac{3+3+3}{56} = \dfrac{9}{56}$; $P(B) = 1 - P(Y=6) = \dfrac{53}{56}$; $P(C) = P(Y=2) + P(Y=3) = \dfrac{3}{28}$.

Exercice 17

Un sac contient 6 boules blanches numérotées 0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 2 et 2 noires numérotées 0 ; 1. On tire **successivement et sans remise** 2 boules. A : « même couleur » ; B : « deux nombres pairs ». 1. Montrer que $P(A) = \frac{4}{7}$ et $P(B) = \frac{5}{14}$. 2. Montrer que $P(A \cap B) = \frac{3}{14}$; indépendance ? 3. C : « même couleur ou deux nombres pairs ». Montrer que $P(C) = \frac{5}{7}$. 4. X : produit des deux numéros. a) Justifier $X(\Omega) = \{0;1;2\}$. b) Montrer que $P(X=0) = \frac{11}{14}$. c) Loi de X et $E(X)$.

✔ Solution

$\text{card}\,\Omega = A_8^2 = 56$.

1 $P(A) = \dfrac{6\times5 + 2\times1}{56} = \dfrac{32}{56} = \dfrac{4}{7}$; boules paires : $0,0,0,2$ (blanches) et 0 (noire), soit 5 : $P(B) = \dfrac{5\times4}{56} = \dfrac{5}{14}$.

2 $A \cap B$: deux blanches paires : $\dfrac{4\times3}{56} = \dfrac{3}{14}$; $P(A)P(B) = \dfrac{10}{49} \neq \dfrac{3}{14}$: non indépendants.

3 $C = A \cup B$: $P(C) = \dfrac{4}{7} + \dfrac{5}{14} - \dfrac{3}{14} = \dfrac{10}{14} = \dfrac{5}{7}$.

4 a) Quatre boules portent 0, trois portent 1, une porte 2 : produits 0, $1\times1=1$, $1\times2=2$ (2×2 impossible).

b) $P(X=0) = 1 - \dfrac{4\times3}{56} = \dfrac{44}{56} = \dfrac{11}{14}$.

c) $P(X=1) = \dfrac{3\times2}{56} = \dfrac{3}{28}$; $P(X=2) = \dfrac{2\times3\times1}{56} = \dfrac{3}{28}$; $E(X) = \dfrac{3}{28} + \dfrac{6}{28} = \dfrac{9}{28}$.

Exercice 18

Une boîte contient 8 cubes : un grand cube rouge, 3 petits rouges, deux grands verts, un petit vert et un petit jaune. On choisit **simultanément** 3 cubes. 1. Probabilités de A : « couleurs différentes » et B : « au plus un petit cube ». 2. X : nombre de petits cubes rouges. a) Loi de X. b) $E(X)$ et $V(X)$. 3. On répète n fois l'épreuve avec remise ; p_n : probabilité que B soit réalisé au moins une fois. a) p_n en fonction de n. b) Plus petit n tel que $p_n \geq 0{,}99$.

✔ Solution

$\text{card}\,\Omega = C_8^3 = 56$; couleurs : 4 rouges, 3 verts, 1 jaune ; tailles : 5 petits, 3 grands.

1 $P(A) = \dfrac{4 \times 3 \times 1}{56} = \dfrac{3}{14}$; $P(B) = \dfrac{C_3^3 + 5\,C_3^2}{56} = \dfrac{16}{56} = \dfrac{2}{7}$.

2 a) 3 petits rouges et 5 autres cubes :

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

b) $E(X) = \dfrac{30+30+3}{56} = \dfrac{9}{8}$; $V(X) = \dfrac{30+60+9}{56} - \dfrac{81}{64} = \dfrac{225}{448}$.

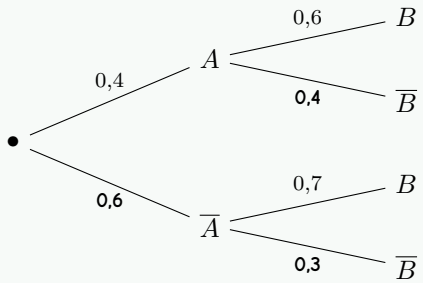
3 a) $p_n = 1 - \left(1 - \dfrac{2}{7}\right)^n = 1 - \left(\dfrac{5}{7}\right)^n$.

b) $p_n \geq 0{,}99 \iff \left(\frac{5}{7}\right)^n \leq 0{,}01 \iff n \geq \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln \frac{5}{7}} \approx 13{,}7$: le plus petit entier est $n = 14$.

Exercice 19

On donne l'arbre pondéré suivant : $p(A) = 0{,}4$, $p_A(B) = 0{,}6$, $p_{\overline{A}}(B) = 0{,}7$. 1. Indiquer les probabilités manquantes. 2. Calculer $p(A \cap B)$, $p\left(A \cap \overline{B}\right)$, $p\left(\overline{A} \cap B\right)$, $p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$.

Solution



1. $p\left(\overline{A}\right) = 0{,}6$; $p_A\left(\overline{B}\right) = 0{,}4$; $p_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0{,}3$ (en gras sur l'arbre).
2. $p(A \cap B) = 0{,}24$; $p\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}16$; $p\left(\overline{A} \cap B\right) = 0{,}42$; $p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}18$ (total : 1).

Exercice 20

Un jour donné, la probabilité d'une panne mécanique est $0{,}005$, celle d'une panne électronique est $0{,}003$, et la probabilité d'une panne mécanique sachant qu'une panne électronique a eu lieu est $0{,}002$. E : « panne électronique » ; M : « panne mécanique ». 1. Probabilité des deux pannes. 2. Probabilité d'aucune panne. 3. a) Calculer $P_{\overline{E}}(M)$. b) Comparer $P_E(M)$ et $P_{\overline{E}}(M)$ et interpréter.

Solution

1. $P(E \cap M) = P(E)\,P_E(M) = 0{,}003 \times 0{,}002 = 0{,}000\,006$.
2. $P\left(\overline{E} \cap \overline{M}\right) = 1 - P(E \cup M) = 1 - (0{,}005 + 0{,}003 - 0{,}000\,006) = 0{,}992\,006$.
3. a) $P_{\overline{E}}(M) = \dfrac{P(M) - P(E \cap M)}{1 - P(E)} = \dfrac{0{,}004\,994}{0{,}997} \approx 0{,}005\,01$.

b) $P_E(M) = 0{,}002 < P_{\overline{E}}(M) \approx 0{,}005$: une panne mécanique est moins probable un jour où survient une panne électronique ; E et M ne sont pas indépendants.

Exercice 21

On lance 4 fois de suite une pièce équilibrée. 1. Dresser la liste des issues équiprobables. 2. Quel est l'événement le plus probable : A : « 2 piles et 2 faces » ou B : « 3 piles et 1 face » ?

Solution

1. $2^4 = 16$ issues : $PPPP$, $PPPF$, $PPFP$, $PFPP$, $FPPP$, $PPFF$, $PFPF$, $PFFP$, $FPPF$, $FPFP$, $FFPP$, $PFFF$, $FPFF$, $FFPF$, $FFFP$, $FFFF$.

2. $P(A)=\dfrac{C_4^2}{16}=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$ et $P(B)=\dfrac{C_4^3}{16}=\dfrac{1}{4}$: A est le plus probable.

Exercice 22

Une urne contient trois boules blanches et sept rouges. On effectue quatre tirages successifs avec remise. Probabilité de A : « tirer deux boules blanches » et B : « tirer une seule boule blanche ».

Solution

Le nombre de blanches suit $\mathcal{B}(4;0{,}3)$: $P(A)=C_4^2(0{,}3)^2(0{,}7)^2=0{,}2646$ (exactement deux) ; $P(B)=C_4^1(0{,}3)(0{,}7)^3=0{,}4116$.

Exercice 23

Dans une série de 5 tirs au but, un joueur marque 5 buts avec la probabilité $0{,}2$, 4 buts avec $0{,}5$, 3 buts avec $0{,}3$. Chaque joueur effectue deux séries indépendantes. 1. Loi de X : nombre de buts au cours d'un entraînement. 2. Espérance de X.

Solution

1. $X(\Omega)=\{6;7;8;9;10\}$: $P(X=10)=0{,}2^2=0{,}04$; $P(X=9)=2\times0{,}2\times0{,}5=0{,}2$; $P(X=8)=0{,}5^2+2\times0{,}2\times0{,}3=0{,}37$;
$P(X=7)=2\times0{,}5\times0{,}3=0{,}3$; $P(X=6)=0{,}3^2=0{,}09$ (total 1).
2. $E(X)=6\times0{,}09+7\times0{,}3+8\times0{,}37+9\times0{,}2+10\times0{,}04=7{,}8$ $(=2\times3{,}9)$.

Exercice 24

Un élève répond au hasard aux 10 questions d'un Q.C.M. (5 réponses proposées, une seule exacte). X : nombre de bonnes réponses. 1. Montrer que X suit une loi binomiale. 2. Probabilité d'au moins 5 bonnes réponses. 3. Espérance du nombre de bonnes réponses.

Solution

1. 10 épreuves identiques et indépendantes, chacune à deux issues (succès de probabilité $\frac{1}{5}$) : $X\hookrightarrow\mathcal{B}\left(10;\frac{1}{5}\right)$.

2. $P(X\geq5)=\displaystyle\sum_{k=5}^{10}C_{10}^k\frac{4^{10-k}}{5^{10}}=\frac{258\,048+53\,760+7\,680+720+40+1}{9\,765\,625}=\frac{320\,249}{9\,765\,625}\approx0{,}033.$

3. $E(X)=10\times\dfrac{1}{5}=2.$

Exercice 25

Une urne contient 6 boules bleues, 3 rouges et 2 vertes. 1. On tire simultanément 3 boules. a) Probabilités de E_1 : « couleurs toutes différentes » et E_2 : « même couleur ». b) X : nombre de boules bleues ; loi et espérance. 2. On effectue k tirages successifs avec remise ($k\geq2$). Valeur minimale de k pour que la probabilité de ne tirer que des bleues soit au moins mille fois celle de ne tirer que des rouges ?

Solution

$\operatorname{card}\Omega=C_{11}^3=165$.

1 a) $P(E_1)=\dfrac{6\times3\times2}{165}=\dfrac{12}{55}$; $P(E_2)=\dfrac{C_6^3+C_3^3}{165}=\dfrac{21}{165}=\dfrac{7}{55}$.

b)

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{C_5^3}{165}=\frac{2}{33}$	$\frac{6C_5^2}{165}=\frac{4}{11}$	$\frac{5C_6^2}{165}=\frac{5}{11}$	$\frac{C_6^3}{165}=\frac{4}{33}$

$E(X)=\dfrac{60+150+60}{165}=\dfrac{18}{11}$.

2 On veut $\left(\frac{6}{11}\right)^k\geq1000\left(\frac{3}{11}\right)^k\iff2^k\geq1000$; or $2^9=512$ et $2^{10}=1024$: $k_{\min}=10$.

Exercice 26

On écrit les entiers de 1 à 20 sur vingt cartons et on en tire un au hasard. A : « nombre impair » ; B : « multiple de 5 ». 1. A et B sont-ils indépendants ? incompatibles ? 2. Même question en rajoutant un carton numéroté 21.

Solution

1. $P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, $A \cap B = \{5; 15\}$: $P(A \cap B) = \frac{1}{10} = P(A)P(B)$: **indépendants** ; $A \cap B \neq \varnothing$: **non incompatibles**.
2. $P(A) = \frac{11}{21}$, $P(B) = \frac{4}{21}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{21} = \frac{42}{441} \neq \frac{44}{441} = P(A)P(B)$: **non indépendants**, et toujours **non incompatibles**.