CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 8

# Applications de la dérivation

1ère Spé Maths

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

## Exercice 1 : Parité

Étudier la parité de chaque fonction :

1. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ sur $\mathbb{R}$ ;
2. $g(x) = 2x^3 - x$ sur $\mathbb{R}$ ;
3. $h(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\}$ ;
4. $k(x) = x^2 - 3x$ sur $\mathbb{R}$.

**Solution**

Tous les ensembles de définition sont symétriques par rapport à $0$.

1. $f(-x) = x^4 - 2x^2 + 3 = f(x)$ : paire.
2. $g(-x) = -2x^3 + x = -g(x)$ : impaire.
3. $h(-x) = \dfrac{-x}{x^2 - 4} = -h(x)$ : impaire.
4. $k(1) = -2$ et $k(-1) = 4$ : ni paire ni impaire.

## Exercice 2 : Variations d'un polynôme

Dresser le tableau de variation de $f(x) = x^3 - 12x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

**Solution**

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$. $f(-2) = -8 + 24 + 1 = 17$ ; $f(2) = 8 - 24 + 1 = -15$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $17$ | ↘ | $-15$ | ↗ | |

## Exercice 3 : Fonctions rationnelles

Étudier les variations de :

1. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$ sur $]-2\,;+\infty[$ ;
2. $g(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$.

**Solution**

1. $f'(x) = \dfrac{2(x+2) - (2x-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{5}{(x+2)^2} > 0$ : $f$ est strictement croissante sur $]-2\,;+\infty[$.
2. $g'(x) = \dfrac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. Sur $]1\,;+\infty[$, $x > 0$ : signe de $x - 2$. $g$ décroît sur $]1\,;2]$ et croît sur $[2\,;+\infty[$ ; minimum $g(2) = 4$.

## Exercice 4 : Extremums sur un intervalle

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ sur $[-3\,;5]$.

1. Dresser le tableau de variation de $f$.
2. Déterminer le maximum et le minimum de $f$ sur $[-3\,;5]$.

**Solution**

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$. $f(-3) = -23$, $f(-1) = 9$, $f(3) = -23$, $f(5) = 9$.

| $x$ | $-3$ | | $-1$ | | $3$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-23$ | ↗ | $9$ | ↘ | $-23$ | ↗ | $9$ |

2. Maximum $9$ (atteint en $-1$ et en $5$) ; minimum $-23$ (atteint en $-3$ et en $3$).

## Exercice 5 : Rectangle sous une parabole

Un rectangle $OABC$ a deux côtés sur les axes d'un repère orthonormé et son sommet $B$ sur la courbe d'équation $y = 9 - x^2$, avec $B(x\,;9-x^2)$ et $x \in ]0\,;3[$.

1. Exprimer l'aire $A(x)$ du rectangle.
2. Déterminer la valeur de $x$ pour laquelle l'aire est maximale, et cette aire maximale.

**Solution**

1. $A(x) = x(9-x^2) = 9x - x^3$.
2. $A'(x) = 9 - 3x^2 = 3(3-x^2) = 3(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)$ : positif sur $]0\,;\sqrt{3}[$, négatif sur $]\sqrt{3}\,;3[$.
   Aire maximale pour $x = \sqrt{3}$ : $A(\sqrt{3}) = 9\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \approx 10{,}39$.

## Exercice 6 : Coût moyen minimal

Le coût de fabrication de $q$ tonnes d'un produit ($q > 0$) est $C(q) = q^2 + 100$ (en milliers d'euros). Le coût moyen par tonne est $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$. Pour quelle production le coût moyen est-il minimal ? Quel est ce coût moyen minimal ?

**Solution**

$C_M(q) = q + \dfrac{100}{q}$ ; $C_M'(q) = 1 - \dfrac{100}{q^2} = \dfrac{(q-10)(q+10)}{q^2}$, du signe de $q-10$ sur $]0\,;+\infty[$.
Le coût moyen est minimal pour $q = 10$ tonnes : $C_M(10) = 20$ milliers d'euros par tonne.

## Exercice 7 : Une inégalité

Montrer que, pour tout $x > 0$, $x^2 + \dfrac{16}{x} \geqslant 12$.

**Solution**

$h(x) = x^2 + \dfrac{16}{x} - 12$ sur $]0\,;+\infty[$ : $h'(x) = 2x - \dfrac{16}{x^2} = \dfrac{2(x^3-8)}{x^2}$. $x^3 - 8 < 0$ si $x < 2$ et $> 0$ si $x > 2$.
Donc $h$ décroît sur $]0\,;2]$, croît sur $[2\,;+\infty[$, et son minimum est $h(2) = 4 + 8 - 12 = 0$. Ainsi $h(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire $x^2 + \dfrac{16}{x} \geqslant 12$.

## Exercice 8 : Positions relatives

1. Étudier la position relative des courbes de $f(x) = x^3 - 2x$ et $g(x) = 2x$.
2. Déterminer la tangente $T$ à la courbe de $u(x) = x^3$ au point d'abscisse $-1$. Vérifier que $x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$, puis étudier la position de la courbe par rapport à $T$.

**Solution**

1. $d(x) = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$ : $d < 0$ sur $]-\infty\,;-2[\cup]0\,;2[$ (courbe de $f$ en dessous) et $d > 0$ sur $]-2\,;0[\cup]2\,;+\infty[$ (au-dessus) ; intersections en $-2$, $0$ et $2$.
2. $u(-1) = -1$, $u'(-1) = 3$ : $T : y = 3(x+1) - 1 = 3x + 2$. $(x+1)^2(x-2) = (x^2+2x+1)(x-2) = x^3 - 3x - 2$. ✓
   $d(x) = x^3 - (3x+2) = (x+1)^2(x-2)$ a le signe de $x - 2$ (pour $x \neq -1$) : la courbe est en dessous de $T$ sur $]-\infty\,;2[$ (et touche $T$ en $x = -1$), au-dessus sur $]2\,;+\infty[$.

## Exercice 9 : Synthèse

Soit $f(x) = \dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$.

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$.
2. Dresser le tableau de variation de $f$. En déduire que $f(x) \geqslant 3$ pour tout $x > -1$.
3. Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

**Solution**

1. $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x+1) - (x^2+x+4)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$.
2. Sur $]-1\,;+\infty[$, $x + 3 > 0$ : $f'$ a le signe de $x - 1$. $f$ décroît sur $]-1\,;1]$, croît sur $[1\,;+\infty[$ ; minimum $f(1) = \dfrac{6}{2} = 3$. Donc $f(x) \geqslant 3$.
3. $f(x) - x = \dfrac{x^2+x+4-x^2-x}{x+1} = \dfrac{4}{x+1} > 0$ : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\Delta$.