CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 2

Cercle trigonométrique

1ère Spé Maths

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Organisation de la série

Partie A – Radians (ex. 1 à 5)
Partie B – Points du cercle trigonométrique (ex. 6 et 7)
Partie C – Cosinus et sinus (ex. 8 à 10)
Partie D – Angles associés (ex. 11 à 14)
Partie E – Équations (ex. 15 à 17)

A Radians

Exercice 1 : Radians → degrés

Les mesures ci-dessous sont exprimées en radians ; les convertir en degrés (valeurs exactes).

$$\frac{3\pi}{5}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\ ;\ \frac{5\pi}{12}\ ;\ \frac{\pi}{16}\ ;\ 1\ ;\ \frac{11\pi}{120}$$

Solution

On multiplie par $\frac{180}{\pi}$: $\frac{3\pi}{5} = 108°$; $\frac{2\pi}{3} = 120°$; $\frac{3\pi}{4} = 135°$; $\frac{5\pi}{12} = 75°$; $\frac{\pi}{16} = 11{,}25°$; $1\text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)° \approx 57{,}3°$; $\frac{11\pi}{120} = 16{,}5°$.

Exercice 2 : Degrés → radians

Les mesures ci-dessous sont exprimées en degrés ; les convertir en radians (valeurs exactes).

$$36°\ ;\ 15°\ ;\ 240°\ ;\ 270°\ ;\ 720°\ ;\ 105°\ ;\ 1°$$

Solution

On multiplie par $\frac{\pi}{180}$: $36° = \frac{\pi}{5}$; $15° = \frac{\pi}{12}$; $240° = \frac{4\pi}{3}$; $270° = \frac{3\pi}{2}$; $720° = 4\pi$; $105° = \frac{7\pi}{12}$; $1° = \frac{\pi}{180}$.

Exercice 3 : La molécule d'eau

La molécule d'eau est formée de 3 atomes : 2 atomes d'hydrogène H et un atome d'oxygène O. L'angle formé par les 2 liaisons O–H mesure $104°$.

1. Déterminer la mesure en radians de l'angle de la liaison.
2. De manière générale, les mesures des angles des liaisons covalentes vont de $104°$ à $109{,}5°$. Déterminer l'intervalle correspondant en radians.

Solution

1. $104 \times \frac{\pi}{180} = \frac{104\pi}{180} = \frac{26\pi}{45}$ rad $\approx 1{,}82$ rad.

2 $109{,}5 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{219\pi}{360} = \dfrac{73\pi}{120}$: l'intervalle est $\left[\dfrac{26\pi}{45} ; \dfrac{73\pi}{120}\right]$ (environ $[1{,}82 ; 1{,}91]$).

Exercice 4 : Angles d'un triangle

Dans chaque cas, exprimer en radians les mesures des trois angles α, β et γ d'un triangle tel que :

a) $\alpha = 70°$ et $\beta = 15°$;

b) le triangle est rectangle isocèle ;

c) le triangle est isocèle et $\alpha = 45°$;

d) le triangle est équilatéral.

✔ **Solution**

La somme des angles vaut $180° = \pi$ rad.

a) $\gamma = 95°$: $\alpha = \dfrac{7\pi}{18}$, $\beta = \dfrac{\pi}{12}$, $\gamma = \dfrac{19\pi}{36}$.

b) $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{4}$.

c) Si α est un angle à la base : $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{2}$. Si α est l'angle au sommet : $\dfrac{\pi}{4}$ et deux angles de $67{,}5° = \dfrac{3\pi}{8}$.

d) $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 5 : Snowboard

Certaines figures de snowboard portent des noms qui correspondent à des mesures d'angles en degrés. Il y a le 180, le 270, le 360, le 450, le 630, le 720, le 810, le 900, le 1080, le 1260 et le 1440. Traduire ces figures en radians.

✔ **Solution**

$180 = \pi$; $270 = \dfrac{3\pi}{2}$; $360 = 2\pi$; $450 = \dfrac{5\pi}{2}$; $630 = \dfrac{7\pi}{2}$; $720 = 4\pi$; $810 = \dfrac{9\pi}{2}$; $900 = 5\pi$; $1080 = 6\pi$; $1260 = 7\pi$; $1440 = 8\pi$.

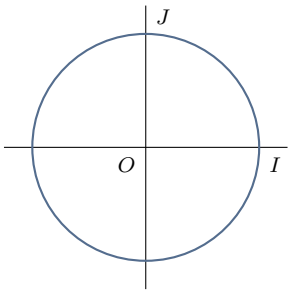
B Points du cercle trigonométrique

Exercice 6 : Placer des points

1 Placer sur le cercle trigonométrique les points images des réels :

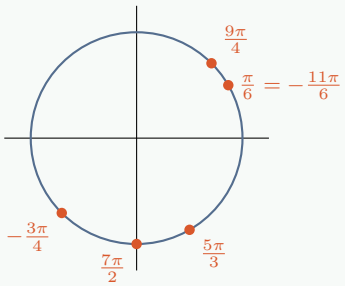
$$\frac{\pi}{6} ; -\frac{3\pi}{4} ; \frac{5\pi}{3} ; \frac{7\pi}{2} ; -\frac{11\pi}{6} ; \frac{9\pi}{4}.$$

2 Deux de ces réels ont le même point image : lesquels ? Justifier par un calcul.



✔ Solution

1 $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ (image de $-\frac{\pi}{3}$) ; $\frac{7\pi}{2} = 4\pi - \frac{\pi}{2}$ (image de $-\frac{\pi}{2}$, point J') ; $-\frac{11\pi}{6} = -2\pi + \frac{\pi}{6}$ (image de $\frac{\pi}{6}$) ; $\frac{9\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$ (image de $\frac{\pi}{4}$).



2 $\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{12\pi}{6} = 2\pi : \frac{\pi}{6}$ et $-\frac{11\pi}{6}$ ont le même point image.

Exercice 7 : Se ramener à $]-\pi\,;\pi]$

Pour chaque réel, trouver le réel de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ qui a le même point image sur le cercle trigonométrique.

a) $\frac{25\pi}{6}$

b) $-\frac{17\pi}{4}$

c) $\frac{31\pi}{3}$

d) -45π

e) $\frac{102\pi}{5}$

f) $-\frac{14\pi}{2}$

✔ Solution

On ajoute ou on retire un nombre entier de tours 2π.

a) $\frac{25\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2 \times 2\pi : \frac{\pi}{6}$.

b) $-\frac{17\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} - 2 \times 2\pi : -\frac{\pi}{4}$.

c) $\frac{31\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 5 \times 2\pi : \frac{\pi}{3}$.

d) $-45\pi = \pi - 23 \times 2\pi : \pi$.

e) $\frac{102\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} + 10 \times 2\pi : \frac{2\pi}{5}$.

f) $-\frac{14\pi}{2} = -7\pi = \pi - 4 \times 2\pi : \pi$.

C Cosinus et sinus

Exercice 8 : Lecture sur un cercle partagé

Le cercle trigonométrique est partagé régulièrement en 12 arcs égaux (pas de $\frac{\pi}{6}$). Pour chaque réel x, préciser le quart de cercle où se trouve son point image, puis donner $\cos x$ et $\sin x$.

a) $x = \frac{2\pi}{3}$

b) $x = -\frac{3\pi}{4}$

c) $x = \frac{11\pi}{6}$

d) $x = \frac{5\pi}{4}$

e) $x = -\frac{7\pi}{6}$

f) $x = \frac{13\pi}{3}$

✔ Solution

a) En haut à gauche : $\cos = -\frac{1}{2}$, $\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) En bas à gauche : $\cos = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) En bas à droite : $\cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin = -\frac{1}{2}$.

d) En bas à gauche : $\cos = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

e) $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi = \frac{5\pi}{6}$, en haut à gauche : $\cos = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin = \frac{1}{2}$.

f) $\frac{13\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2 \times 2\pi$, en haut à droite : $\cos = \frac{1}{2}$, $\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 9 : Sinus connaissant le cosinus

Dans chaque cas, calculer la valeur exacte demandée.

a) $x \in [0\,;\pi]$ et $\cos x = -0{,}8$: calculer $\sin x$.

b) $x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ et $\sin x = \frac{5}{13}$: calculer $\cos x$.

c) $x \in [-\pi\,;0]$ et $\cos x = \frac{1}{3}$: calculer $\sin x$.

d) $x \in \left[\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right]$ et $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$: calculer $\cos x$.

✔ Solution

a) $\sin^2 x = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$; sur $[0\,;\pi]$, $\sin x \geqslant 0$: $\sin x = 0{,}6$.

b) $\cos^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$; sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, $\cos x \leqslant 0$: $\cos x = -\frac{12}{13}$.

c) $\sin^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$; sur $[-\pi\,;0]$, $\sin x \leqslant 0$: $\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

d) $\cos^2 x = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$; sur $\left[\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right]$, $\cos x \leqslant 0$: $\cos x = -\frac{2}{3}$.

Exercice 10 : Lien avec le triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 5$ et $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}$.

1 Donner $\cos\frac{\pi}{6}$ et $\sin\frac{\pi}{6}$.

2 Calculer les valeurs exactes de BC puis de AC.

✔ Solution

1 $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

2 $\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$, donc $BC = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$. $\sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$, donc $AC = \frac{10\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

D Angles associés

Exercice 11 : Valeurs exactes

Déterminer la valeur exacte de chaque nombre en utilisant les angles associés.

a) $\cos\frac{5\pi}{6}$

b) $\sin\frac{7\pi}{4}$

c) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

d) $\sin\frac{4\pi}{3}$

e) $\cos\dfrac{17\pi}{6}$ **f)** $\sin\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)$

Solution

a) $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$.

d) $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

e) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi\right)=\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

f) $-\sin\frac{5\pi}{4}=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 12 : Simplifier des expressions

Simplifier, pour tout réel x :

a) $A(x)=\cos(\pi+x)+\cos(\pi-x)+2\cos(-x)$;

b) $B(x)=\sin(\pi-x)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)-\sin(\pi+x)$;

c) $C(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+\sin(-x)-\cos x$.

Solution

a) $A(x)=-\cos x-\cos x+2\cos x=0$.

b) $B(x)=\sin x+\sin x+\sin x=3\sin x$.

c) $C(x)=-\sin x+\cos x-\sin x-\cos x=-2\sin x$.

Exercice 13 : Comme au DST

Soit un réel $a\in\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(a)=\dfrac{1}{3}$.

1 Donner, en justifiant, le signe de $\sin(a)$, puis calculer sa valeur exacte.

2 En déduire la valeur exacte de $\cos(\pi-a)$, $\sin(\pi+a)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+a\right)$.

Solution

1 $a\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$: le point image est dans le quart en haut à droite, donc $\sin(a)\geqslant 0$. $\sin^2(a)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$, donc $\sin(a)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2 $\cos(\pi-a)=-\frac{1}{3}$; $\sin(\pi+a)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin(a)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\cos(a)=\frac{1}{3}$.

Exercice 14 : Sommes astucieuses

1 Montrer que $\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\cos\dfrac{\pi}{7}$. En déduire la valeur de

$$S=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}.$$

2 Calculer $T=\cos^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{3\pi}{8}$. *(Indication : $\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$.)*

✔ Solution

1 $\cos\frac{6\pi}{7} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = -\cos\frac{\pi}{7}$. De même $\cos\frac{5\pi}{7} = -\cos\frac{2\pi}{7}$ et $\cos\frac{4\pi}{7} = -\cos\frac{3\pi}{7}$. Les termes s'annulent deux à deux : $S = 0$.

2 $\cos\frac{3\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{8}$, donc $T = \cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} = 1$.

E Équations

Exercice 15 : Équations dans $\mathbb{R}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin x = -1$

c) $\sin x = \dfrac{1}{2}$

d) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

✔ Solution

Avec $k \in \mathbb{Z}$:

a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

b) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (un seul point : J').

c) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

d) $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$.

Exercice 16 : Équations sur un intervalle

Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle indiqué.

a) $2\cos x - 1 = 0$ dans $]-\pi\,;\pi]$;

b) $\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$ dans $[0\,;2\pi[$;

c) $2\cos x + \sqrt{2} = 0$ dans $[0\,;4\pi[$;

d) $\cos x = 2$ dans $\mathbb{R}$.

✔ Solution

a) $\cos x = \frac{1}{2}$: $S = \left\{-\frac{\pi}{3}\,;\frac{\pi}{3}\right\}$.

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$. Dans $[0\,;2\pi[$: $S = \left\{\frac{5\pi}{4}\,;\frac{7\pi}{4}\right\}$.

c) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$. Dans $[0\,;4\pi[$: $S = \left\{\frac{3\pi}{4}\,;\frac{5\pi}{4}\,;\frac{11\pi}{4}\,;\frac{13\pi}{4}\right\}$.

d) $2 > 1$ et $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$: aucune solution, $S = \varnothing$.

Exercice 17 : Avec le second degré

1 Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $4\sin^2 x - 3 = 0$.

2 On pose $X = \cos x$. Résoudre $2X^2 - X - 1 = 0$, puis résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.

✔ Solution

1 $\sin^2 x = \frac{3}{4} \iff \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dans $]-\pi\,;\pi]$: $S = \left\{-\frac{2\pi}{3}\,;-\frac{\pi}{3}\,;\frac{\pi}{3}\,;\frac{2\pi}{3}\right\}$.

2 $\Delta = 1 + 8 = 9$: $X = \frac{1+3}{4} = 1$ ou $X = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$.
$\cos x = 1 \iff x = 0$; $\cos x = -\frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{2\pi}{3}$ dans $]-\pi\,;\pi]$. $S = \left\{-\frac{2\pi}{3}\,;0\,;\frac{2\pi}{3}\right\}$.