CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 10

1ère Spé Maths

Équations de droite et de cercle

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Dans toute la série, le repère est orthonormé.

Exercice 1 : Vecteur directeur

Déterminer une équation cartésienne de :

1. la droite passant par $A(2\,;-3)$ de vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;4)$;
2. la droite (AB) avec $A(-1\,;0)$ et $B(3\,;2)$;
3. la parallèle à $d : x+3y-2=0$ passant par $C(1\,;1)$.

Solution

1. $(x-2)\times 4-(y+3)\times 1=0 \iff 4x-y-11=0$.
2. $\overrightarrow{AB}\,(4\,;2)$: $(x+1)\times 2-y\times 4=0 \iff 2x-4y+2=0 \iff x-2y+1=0$.
3. Même vecteur normal $(1\,;3)$: $x+3y+c=0$ avec $1+3+c=0$, donc $x+3y-4=0$.

Exercice 2 : Lire une équation

Soit $d : -2x+5y-10=0$. Donner un vecteur directeur, un vecteur normal, deux points de d et son équation réduite.

Solution

Vecteur directeur $(-5\,;-2)$, ou $(5\,;2)$; vecteur normal $(-2\,;5)$. Points : $(0\,;2)$ et $(-5\,;0)$. Équation réduite : $y=0{,}4x+2$.

Exercice 3 : Perpendiculaire

Déterminer une équation de la droite passant par $A(-3\,;2)$ et perpendiculaire à $d : 4x-y+1=0$.

Solution

Un vecteur directeur de d, $(1\,;4)$, est normal à la droite cherchée : $(x+3)+4(y-2)=0 \iff x+4y-5=0$.

Exercice 4 : Médiatrice

Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(1\,;2)$ et $B(5\,;6)$.

Solution

Elle passe par le milieu $I(3\,;4)$ et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}\,(4\,;4)$, ou $(1\,;1)$: $(x-3)+(y-4)=0 \iff x+y-7=0$.

Exercice 5 : Projeté orthogonal

Soit $d : x-y+1=0$ et $A(3\,;0)$. Déterminer le projeté orthogonal H de A sur d, puis la distance de A à d.

Solution

Vecteur directeur de d : $(1\,;1)$. Perpendiculaire en A : $(x-3)+y=0 \iff x+y-3=0$. Avec $y=x+1$: $2x-2=0$, donc $H(1\,;2)$. $AH=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$.

Exercice 6 : Équations de cercles

1. Écrire une équation du cercle de centre $\Omega(3\,;-1)$ et de rayon $\sqrt{5}$. Le point $E(4\,;1)$ lui appartient-il ?
2. Écrire une équation du cercle de centre $\Omega'(1\,;2)$ passant par $A(4\,;6)$.

Solution

1. $(x-3)^2+(y+1)^2=5$; pour E : $1+4=5$, donc E appartient au cercle.
2. $r=\Omega' A=\sqrt{9+16}=5$: $(x-1)^2+(y-2)^2=25$.

Exercice 7 : Reconnaître un cercle

Déterminer la nature des ensembles d'équations :

1. $x^2+y^2-2x+4y-4=0$;
2. $x^2+y^2+6x-2y+10=0$.

Solution

1. $(x-1)^2-1+(y+2)^2-4-4=0 \iff (x-1)^2+(y+2)^2=9$: cercle de centre $(1\,;-2)$ et de rayon 3.
2. $(x+3)^2-9+(y-1)^2-1+10=0 \iff (x+3)^2+(y-1)^2=0$: un seul point, $(-3\,;1)$.

Exercice 8 : Cercle de diamètre $[AB]$

Soit $A(-2\,;3)$ et $B(4\,;-1)$. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ de deux façons (avec $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$, puis avec le centre et le rayon).

Solution

$(x+2)(x-4)+(y-3)(y+1)=0 \iff x^2+y^2-2x-2y-11=0$.

Centre $(1\,;1)$, rayon $\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{36+16}}{2}=\sqrt{13}$: $(x-1)^2+(y-1)^2=13$, qui se développe en la même équation.

Exercice 9 : Droite et cercle

Déterminer les points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$: $(x-2)^2+y^2=10$ et de la droite d : $y=x$.

Solution

$(x-2)^2+x^2=10 \iff 2x^2-4x-6=0 \iff x^2-2x-3=0$: $x=3$ ou $x=-1$. Points $(3\,;3)$ et $(-1\,;-1)$.

Exercice 10 : Dans un carré

$ABCD$ est un carré de côté 6 ; E est le milieu de $[AB]$ et F le point de $[BC]$ tel que $BF=1{,}5$. En utilisant un repère orthonormé d'origine A, montrer que les droites (DE) et (EF) sont perpendiculaires.

Solution

$A(0\,;0)$, $B(6\,;0)$, $C(6\,;6)$, $D(0\,;6)$, $E(3\,;0)$, $F(6\,;1{,}5)$. $\overrightarrow{ED}\,(-3\,;6)$, $\overrightarrow{EF}\,(3\,;1{,}5)$: $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EF}=-9+9=0$, donc $(DE)\perp(EF)$.