CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 12

# Fonction exponentielle

1ère Spé Maths

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

## Exercice 1 : Simplifier

Simplifier, pour tout réel $x$ :

1. $A = \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{2-x}$ ;
2. $B = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{x+1}\right)^2}{\mathrm{e}^{2x}}$ ;
3. $C = \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{2x}\right)$ ;
4. $D = (\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})^2$.

**Solution**

1. $A = \mathrm{e}^{x+2-x} = \mathrm{e}^{2}$.
2. $B = \dfrac{\mathrm{e}^{2x+2}}{\mathrm{e}^{2x}} = \mathrm{e}^{2}$.
3. $C = \mathrm{e}^{0} + \mathrm{e}^{x} = 1 + \mathrm{e}^{x}$.
4. $D = \mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}$.

## Exercice 2 : Équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

1. $\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{5-3x}$ ;
2. $\mathrm{e}^{x^2+x} = \mathrm{e}^{2}$ ;
3. $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{x} = 0$ ;
4. $\mathrm{e}^{4x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}$.

**Solution**

1. $2x = 5 - 3x \iff x = 1$.
2. $x^2 + x - 2 = 0 \iff x = 1$ ou $x = -2$.
3. $\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}) = 0 \iff \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e} \iff x = 1$.
4. $\mathrm{e}^{4x} = \mathrm{e}^{-x} \iff 4x = -x \iff x = 0$.

## Exercice 3 : Inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

1. $\mathrm{e}^{x-3} \geqslant 1$ ;
2. $\mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^{2x+3}$ ;
3. $(1-x)\mathrm{e}^{2x} > 0$ ;
4. $\mathrm{e}^{x^2} \leqslant \mathrm{e}^{4x-3}$.

**Solution**

1. $x - 3 \geqslant 0 : S = [3\,;+\infty[$.
2. $-x < 2x + 3 \iff x > -1 : S = ]-1\,;+\infty[$.

**3** $e^{2x} > 0$, donc $1 - x > 0$ : $S = ]-\infty\,;1[$.

**4** $x^2 - 4x + 3 \leqslant 0$ : racines 1 et 3 : $S = [1\,;3]$.

## Exercice 4 : Dérivées

Dériver les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ :

**1** $f(x) = e^{2x} - 3e^{-x}$ ;

**2** $g(x) = (x^2+1)e^x$ ;

**3** $h(x) = \dfrac{e^{3x}}{x^2+1}$ ;

**4** $k(x) = x\,e^{-2x}$.

✔ Solution

**1** $f'(x) = 2e^{2x} + 3e^{-x}$.

**2** $g'(x) = 2xe^x + (x^2+1)e^x = (x+1)^2e^x$.

**3** $h'(x) = \dfrac{3e^{3x}(x^2+1) - 2x\,e^{3x}}{(x^2+1)^2} = \dfrac{e^{3x}(3x^2-2x+3)}{(x^2+1)^2}$.

**4** $k'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} = (1-2x)e^{-2x}$.

## Exercice 5 : Étude d'une fonction

Soit $f(x) = (x+2)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

**1** Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de $f$.

**2** Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

**3** Résoudre $f(x) \geqslant 0$.

✔ Solution

**1** $f'(x) = e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x$, du signe de $x+3$ : $f$ décroît sur $]-\infty\,;-3]$, croît sur $[-3\,;+\infty[$ ; minimum $f(-3) = -e^{-3} \approx -0{,}05$.

**2** $f(0) = 2$, $f'(0) = 3$ : $y = 3x + 2$.

**3** $e^x > 0$ : $f(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant -2$.

## Exercice 6 : Avec un trinôme

Soit $g(x) = x^2e^x$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de $g$.

✔ Solution

$g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = x(x+2)e^x$ : positif sur $]-\infty\,;-2[$, négatif sur $]-2\,;0[$, positif sur $]0\,;+\infty[$.
$g(-2) = 4e^{-2} \approx 0{,}54$ (maximum local) et $g(0) = 0$ (minimum local).

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↗ | $4e^{-2}$ | ↘ | $0$ | ↗ | |

## Exercice 7 : Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$

Soit $f(x) = \mathrm{e}^{0,5x}$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-2x}$.

1. Donner le sens de variation de $f$ et de $g$.
2. Déterminer les tangentes à leurs courbes au point d'abscisse $0$.
3. Résoudre $f(x) > g(x)$ et interpréter graphiquement.

**Solution**

1. $f'(x) = 0,5\mathrm{e}^{0,5x} > 0$ : $f$ croissante ; $g'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} < 0$ : $g$ décroissante.
2. $f(0) = g(0) = 1$ : tangentes $y = 0,5x + 1$ et $y = -2x + 1$.
3. $0,5x > -2x \iff x > 0$ : la courbe de $f$ est au-dessus de celle de $g$ pour $x > 0$, en dessous pour $x < 0$.

## Exercice 8 : Valeur d'un smartphone

La valeur d'un smartphone, en euros, après $t$ années est $V(t) = 800\,\mathrm{e}^{-0,25t}$.

1. Calculer $V(0)$ et $V(2)$. Étudier les variations de $V$.
2. De quel pourcentage la valeur baisse-t-elle chaque année ?
3. À la calculatrice, après combien d'années entières vaut-il moins de $200$ € ?

**Solution**

1. $V(0) = 800$ ; $V(2) = 800\mathrm{e}^{-0,5} \approx 485,22$. $V'(t) = -200\mathrm{e}^{-0,25t} < 0$ : décroissante.
2. $V(t+1) = V(t) \times \mathrm{e}^{-0,25}$ et $\mathrm{e}^{-0,25} \approx 0,779$ : baisse d'environ $22,1\,\%$ par an.
3. $V(5) \approx 229,20$ et $V(6) \approx 178,50$ : après $6$ ans.

## Exercice 9 : Une inégalité

Montrer que, pour tout réel $x$, $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}\,x$. Interpréter graphiquement.

**Solution**

$h(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}x$ : $h'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}$, négatif si $x < 1$, positif si $x > 1$. Minimum $h(1) = 0$, donc $h(x) \geqslant 0$. La droite $y = \mathrm{e}x$ est la tangente à la courbe de $\exp$ au point d'abscisse $1$ : la courbe est au-dessus de cette tangente.

## Exercice 10 : Synthèse

Soit $f(x) = (3 - x)\mathrm{e}^x$ sur $[0\,;4]$.

1. Montrer que $f'(x) = (2 - x)\mathrm{e}^x$ et dresser le tableau de variation de $f$ sur $[0\,;4]$.
2. Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0\,;4]$.
3. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $0$.

**Solution**

1. $f'(x) = -\mathrm{e}^x + (3 - x)\mathrm{e}^x = (2 - x)\mathrm{e}^x$. $f(0) = 3$, $f(2) = \mathrm{e}^2 \approx 7,39$, $f(4) = -\mathrm{e}^4 \approx -54,6$.

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $3$ | ↗ | $\mathrm{e}^2$ | ↘ | $-\mathrm{e}^4$ |

2. $\mathrm{e}^x > 0$ : $f(x)$ a le signe de $3 - x$ : positif sur $[0\,;3[$, nul en $3$, négatif sur $]3\,;4]$.

**3** $f(0) = 3$, $f'(0) = 2$ : $y = 2x + 3$.