CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 9

1ère Spé Maths

Généralités sur les suites

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Exercice 1 : Forme explicite

1. Soit $u_n = 3n^2 - 1$. Calculer u_0, u_1, u_2, puis exprimer u_{n+1} en fonction de n.
2. Soit $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3.

Solution

1. $u_0 = -1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 11$; $u_{n+1} = 3(n+1)^2 - 1 = 3n^2 + 6n + 2$.
2. $v_0 = 1$, $v_1 = -\frac{1}{2}$, $v_2 = \frac{1}{3}$, $v_3 = -\frac{1}{4}$.

Exercice 2 : Par récurrence

1. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 4$. Calculer u_1, u_2, u_3.
2. $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1 + v_n}$. Calculer v_1, v_2, v_3 et conjecturer une expression de v_n.

Solution

1. $u_1 = 2$, $u_2 = 0$, $u_3 = -4$.
2. $v_1 = \frac{1}{2}$, $v_2 = \dfrac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}$, $v_3 = \dfrac{1/3}{4/3} = \frac{1}{4}$: on conjecture $v_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 3 : Modéliser

1. Une plante mesure 10 cm. Chaque semaine, sa taille augmente de $15\,\%$. On note h_n sa taille après n semaines. Exprimer h_{n+1} en fonction de h_n, puis calculer h_3 (au mm près).
2. Un abonnement coûte 50 € l'inscription, puis 3 € par mois. On note c_n le coût total après n mois. Exprimer c_n en fonction de n.

Solution

1. $h_{n+1} = 1{,}15\,h_n$; $h_1 = 11{,}5$, $h_2 = 13{,}225$, $h_3 \approx 15{,}2$ cm.
2. $c_n = 50 + 3n$.

Exercice 4 : Représentation graphique

Soit $u_n = \dfrac{6}{n+1}$. Calculer u_0 à u_5, représenter ces termes dans un repère, puis conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n).

Solution

$u_0 = 6$, $u_1 = 3$, $u_2 = 2$, $u_3 = 1{,}5$, $u_4 = 1{,}2$, $u_5 = 1$. Les points descendent et se rapprochent de l'axe des abscisses : (u_n) semble décroissante et de limite 0.

Exercice 5 : Sens de variation

Étudier le sens de variation de :

1. $u_n = 2n^2 - n$;
2. $v_n = 4 \times 1{,}5^n$;
3. $w_n = \dfrac{n}{n+1}$;
4. $t_0 = 1$ et $t_{n+1} = t_n - (n+2)^2$.

Solution

1. $u_{n+1} - u_n = 2(2n+1) - 1 = 4n + 1 > 0$: croissante.
2. $v_n > 0$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1{,}5 > 1$: croissante.
3. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$: $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$, donc (w_n) est croissante.
4. $t_{n+1} - t_n = -(n+2)^2 < 0$: décroissante.

Exercice 6 : Lire un programme

```
def f():
    u = 5
    for i in range(3):
        u = u/2 + 1
    return u
```

1. Quelle suite ce programme calcule-t-il ? Quelle valeur renvoie-t-il ?
2. Modifier le programme pour qu'il renvoie la liste $[u_0, u_1, \ldots, u_n]$ pour un entier n donné.

Solution

1. $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 1$; il renvoie u_3 : $u_1 = 3{,}5$, $u_2 = 2{,}75$, $u_3 = 2{,}375$.
2.

```
def liste(n):
    u = 5
    L = [u]
    for i in range(n):
        u = u/2 + 1
        L.append(u)
    return L
```

Exercice 7 : Valeur d'une voiture

Une voiture vaut $20\,000$ € neuve et perd $15\,\%$ de sa valeur chaque année. On note u_n sa valeur après n années.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. Écrire un programme Python donnant le nombre d'années après lequel la voiture vaut moins de $10\,000$ €.
3. Déterminer ce nombre à la calculatrice.

Solution

1. $u_{n+1} = 0{,}85\,u_n$ (et $u_0 = 20\,000$).

2

```
def seuil():
    n = 0
    u = 20000
    while u >= 10000:
        u = 0.85*u
        n = n + 1
    return n
```

3 $u_4 \approx 10\,440$ et $u_5 \approx 8\,874$: après 5 ans.

Exercice 8 : Somme des impairs

Soit $u_n = 2n + 1$ et $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

1 Écrire une fonction Python `somme(n)` qui renvoie S_n.

2 Calculer S_0, S_1, S_2, S_3 et conjecturer une expression de S_n. Que vaut S_9 ?

✔ Solution

1

```
def somme(n):
    S = 0
    for k in range(n+1):
        S = S + 2*k + 1
    return S
```

2 $S_0 = 1$, $S_1 = 4$, $S_2 = 9$, $S_3 = 16$: on conjecture $S_n = (n+1)^2$, donc $S_9 = 100$.

Exercice 9 : Limite et seuil

Soit $u_n = \dfrac{3n-1}{n+2}$.

1 Calculer u_{10}, u_{100}, u_{1000} et conjecturer la limite de (u_n).

2 Déterminer par le calcul le plus petit entier n tel que $u_n > 2{,}9$.

✔ Solution

1 $u_{10} = \frac{29}{12} \approx 2{,}417$; $u_{100} = \frac{299}{102} \approx 2{,}931$; $u_{1000} = \frac{2999}{1002} \approx 2{,}993$: limite conjecturée 3.

2 $u_n > 2{,}9 \iff 3n - 1 > 2{,}9n + 5{,}8 \iff 0{,}1n > 6{,}8 \iff n > 68$: $n = 69$.

Exercice 10 : Méthode en escalier

Soit $u_0 = 0{,}5$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. Tracer la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ et la droite $y = x$ sur $[0\,;1{,}5]$, construire u_1, u_2, u_3 sur l'axe des abscisses, puis conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n).

✔ Solution

$u_1 \approx 0{,}707$; $u_2 \approx 0{,}841$; $u_3 \approx 0{,}917$. L'escalier monte vers le point d'intersection $(1\,;1)$: (u_n) semble croissante et de limite 1.