CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 5

1ère Spé Maths

Inéquations du second degré

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Exercice 1 : Factoriser

Factoriser, lorsque c'est possible, en choisissant la stratégie la plus rapide :

1. $A(x) = 5x^2 - 20x$
2. $B(x) = 25x^2 - 1$
3. $C(x) = 4x^2 - 12x + 9$
4. $D(x) = x^2 + x - 12$
5. $E(x) = 3x^2 - 10x + 3$
6. $F(x) = -2x^2 + 3x + 2$

✔ Solution

1. Facteur commun : $A(x) = 5x(x-4)$.
2. $a^2 - b^2$: $B(x) = (5x-1)(5x+1)$.
3. $(a-b)^2$: $C(x) = (2x-3)^2$.
4. Racine évidente 3 ($9 + 3 - 12 = 0$) ; produit des racines $\frac{c}{a} = -12$, donc l'autre racine est -4 : $D(x) = (x-3)(x+4)$.
5. $\Delta = 100 - 36 = 64$; racines $\frac{10-8}{6} = \frac{1}{3}$ et $\frac{10+8}{6} = 3$: $E(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-3) = (3x-1)(x-3)$.
6. $\Delta = 9 + 16 = 25$; racines $\frac{-3-5}{-4} = 2$ et $\frac{-3+5}{-4} = -\frac{1}{2}$: $F(x) = -2(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (2-x)(2x+1)$.

Exercice 2 : Signe d'un trinôme

Étudier le signe de chacun des polynômes suivants :

1. $P(x) = x^2 + 2x - 15$
2. $Q(x) = -3x^2 + 6x - 3$
3. $R(x) = -x^2 + x - 1$
4. $S(x) = 2x^2 - 5x + 2$

✔ Solution

1. $\Delta = 4 + 60 = 64$; racines $\frac{-2-8}{2} = -5$ et $\frac{-2+8}{2} = 3$; $a = 1 > 0$.

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. $Q(x) = -3(x^2 - 2x + 1) = -3(x-1)^2$: $Q(x) < 0$ pour $x \neq 1$ et $Q(1) = 0$.
3. $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ et $a = -1 < 0$: $R(x) < 0$ pour tout réel x.
4. $\Delta = 25 - 16 = 9$; racines $\frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ et $\frac{5+3}{4} = 2$; $a = 2 > 0$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$S(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 3 : Inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

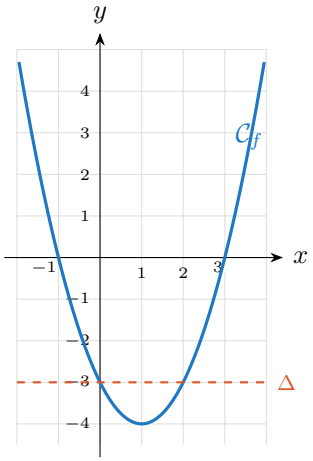
1. $x^2 - 9 \geqslant 0$
2. $x^2 + 4x < 0$
3. $-2x^2 + x + 1 > 0$
4. $9x^2 + 6x + 1 > 0$
5. $x^2 \leqslant 5x - 7$
6. $(x+1)^2 \geqslant 2x + 5$

Solution

1. $(x-3)(x+3) \geqslant 0$: racines -3 et 3, $a > 0$: $S =]-\infty\,;-3] \cup [3\,;+\infty[$.
2. $x(x+4) < 0$: racines -4 et 0, $a > 0$, négatif entre : $S =]-4\,;0[$.
3. $\iff 2x^2 - x - 1 < 0$: racines 1 et $-\frac{1}{2}$ (racine évidente 1, produit $-\frac{1}{2}$) : $S = \left]-\frac{1}{2}\,;1\right[$.
4. $(3x+1)^2 > 0$: vrai sauf si $3x + 1 = 0$: $S = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.
5. $\iff x^2 - 5x + 7 \leqslant 0$: $\Delta = 25 - 28 = -3 < 0$, $a > 0$: toujours strictement positif. $S = \varnothing$.
6. $\iff x^2 + 2x + 1 - 2x - 5 \geqslant 0 \iff x^2 - 4 \geqslant 0$: $S =]-\infty\,;-2] \cup [2\,;+\infty[$.

Exercice 4 : Lecture graphique

On donne la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction polynôme f du second degré et la droite Δ d'équation $y = -3$.



1. Lire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
2. Résoudre graphiquement $f(x) > 0$, puis $f(x) \leqslant 0$.
3. Résoudre graphiquement $f(x) < -3$.
4. On admet que $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Vérifier par le calcul les réponses aux questions 1 et 3.

Solution

1. La courbe coupe l'axe des abscisses en $x = -1$ et $x = 3$: $S = \{-1\,;3\}$.
2. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de l'axe pour $x < -1$ ou $x > 3$: $f(x) > 0$ sur $]-\infty\,;-1[\cup]3\,;+\infty[$.

Elle est sur l'axe ou en dessous sur $[-1\,;3]$: $f(x) \leqslant 0$ sur $[-1\,;3]$.

3 $\mathcal{C}_f$ est strictement en dessous de Δ entre les abscisses 0 et 2 : $S =]0\,;2[$.

4 $(x+1)(x-3) = x^2 - 3x + x - 3 = x^2 - 2x - 3 = f(x)$, donc les racines sont bien -1 et 3.
$f(x) < -3 \iff x^2 - 2x < 0 \iff x(x-2) < 0 \iff x \in]0\,;2[$.

Exercice 5 : Signe d'un produit

Soit $A(x) = (x+2)(x^2 - 6x + 5)$.

1 Factoriser $x^2 - 6x + 5$.

2 Dresser le tableau de signes de $A(x)$.

3 En déduire les solutions de $A(x) \leqslant 0$.

✔ Solution

1 Racine évidente 1 ; produit des racines 5, donc l'autre racine est 5 : $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$.

2

x	$-\infty$		-2		1		5		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-6x+5		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

3 $S =]-\infty\,;-2] \cup [1\,;5]$.

Exercice 6 : Signe d'un quotient

Soit $B(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4}$.

1 Déterminer les valeurs interdites.

2 Dresser le tableau de signes de $B(x)$.

3 Résoudre $B(x) < 0$.

✔ Solution

1 $x^2 - 4 = 0 \iff x = -2$ ou $x = 2$: valeurs interdites -2 et 2.

2 Numérateur : racines 1 et 3 (racine évidente 1, produit 3), $a > 0$. Dénominateur : racines -2 et 2, $a > 0$.

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$B(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

3 $S =]-2\,;1[\cup]2\,;3[$.

Exercice 7 : Inéquation avec quotient

Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$: $\dfrac{2x}{x+1} \leqslant x$.

Solution

$\dfrac{2x}{x+1} - x \leqslant 0 \iff \dfrac{2x - x(x+1)}{x+1} \leqslant 0 \iff \dfrac{-x^2+x}{x+1} \leqslant 0.$

Numérateur $-x^2+x = x(1-x)$: racines 0 et 1, $a = -1 < 0$. Dénominateur : $x+1$ s'annule en -1.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$-x^2+x$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
quotient		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]-1\,;0] \cup [1\,;+\infty[$.

Exercice 8 : Le cadre photo

Une photo rectangulaire de 20 cm sur 30 cm est entourée d'une bordure de largeur x cm ($x > 0$).
Pour quelles largeurs x l'aire totale (photo + bordure) est-elle inférieure ou égale à 816 cm^2 ?

Solution

Dimensions totales : $20+2x$ et $30+2x$. On résout :

$$(20+2x)(30+2x) \leqslant 816 \iff 4x^2+100x+600 \leqslant 816$$

$$\iff 4x^2+100x-216 \leqslant 0 \iff x^2+25x-54 \leqslant 0.$$

$\Delta = 625+216 = 841 = 29^2$; racines $\dfrac{-25-29}{2} = -27$ et $\dfrac{-25+29}{2} = 2$. Négatif entre les racines : $x \in [-27\,;2]$.

Avec $x > 0$: **la bordure doit mesurer au plus 2 cm**, c'est-à-dire $x \in]0\,;2]$.

Exercice 9 : La recette

Un commerçant vend des tee-shirts au prix de p euros, avec $p \in [0\,;50]$. Il en vend alors $100-2p$.

1. Exprimer la recette $R(p)$ en fonction de p.
2. Pour quels prix la recette est-elle au moins égale à $1\,200$ euros ?
3. Résoudre $R(p) \geqslant 1\,250$. Que peut-on en conclure ?

Solution

1. $R(p) = p(100-2p) = -2p^2+100p$.
2. $-2p^2+100p \geqslant 1200 \iff p^2-50p+600 \leqslant 0$. $\Delta = 2500-2400 = 100$, racines 20 et 30.
   La recette est au moins de $1\,200$ euros pour un prix entre 20 et 30 euros : $p \in [20\,;30]$.
3. $p^2-50p+625 \leqslant 0 \iff (p-25)^2 \leqslant 0 \iff p = 25$.
   La recette ne dépasse jamais $1\,250$ euros : c'est la recette maximale, obtenue pour $p = 25$ euros.

Exercice 10 : Avec un paramètre

1. Soit m un réel non nul. Pour quelles valeurs de m l'équation $mx^2+4x+m = 0$ admet-elle deux solutions distinctes ?
2. Pour quelles valeurs du réel m a-t-on $-x^2+mx-4 < 0$ pour tout réel x ?

✔ Solution

1 Il faut $\Delta = 16 - 4m^2 > 0$. Le trinôme $-4m^2 + 16$ (d'inconnue m) a pour racines -2 et 2, $a = -4 < 0$: il est positif entre les racines. Donc $m \in]-2\,;2[$ et $m \neq 0$: $m \in]-2\,;0[\cup]0\,;2[$.

2 $a = -1 < 0$: le trinôme est toujours strictement négatif si et seulement si $\Delta < 0$. $\Delta = m^2 - 16 < 0 \iff m \in]-4\,;4[$.