CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 13

Loi de Bernoulli et répétition d'épreuves

1ère Spé Maths

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Exercice 1 : Reconnaître

Dire si chaque situation est une épreuve de Bernoulli (ou une répétition d'épreuves identiques et indépendantes) et préciser p :

1. On lance une pièce équilibrée ; succès : « Pile ».
2. On tire une carte d'un jeu de 52 ; succès : « obtenir un as ».
3. Une roue a 8 secteurs égaux dont 3 rouges ; succès : « rouge ». Donner $E(X)$ et $V(X)$.
4. On tire successivement sans remise 2 boules d'une urne de 5 boules dont 2 blanches ; on compte les blanches.

Solution

1. Oui, $p = \frac{1}{2}$.
2. Oui, $p = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.
3. Oui, $p = \frac{3}{8}$; $E(X) = \frac{3}{8}$, $V(X) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{64}$.
4. Non : sans remise, les tirages ne sont pas indépendants.

Exercice 2 : Loi de Bernoulli

X suit la loi de Bernoulli de paramètre $0{,}35$. Donner sa loi, puis calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Solution

$P(X = 1) = 0{,}35$, $P(X = 0) = 0{,}65$. $E(X) = 0{,}35$; $V(X) = 0{,}35 \times 0{,}65 = 0{,}2275$; $\sigma(X) \approx 0{,}477$.

Exercice 3 : Deux lancers de dé

On lance deux fois un dé équilibré ; succès : « obtenir 6 ».

1. Construire l'arbre.
2. Calculer la probabilité d'obtenir deux fois 6, exactement une fois 6, au moins une fois 6.

Solution

$p = \frac{1}{6}$. $P(\text{deux } 6) = \frac{1}{36}$; $P(\text{un seul } 6) = 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$; $P(\text{au moins un } 6) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$.

Exercice 4 : Ampoules

Une ampoule est défectueuse avec la probabilité $0{,}1$. On achète 3 ampoules, de façon indépendante. Calculer la probabilité qu'aucune ne soit défectueuse, qu'au moins une le soit, qu'exactement une le soit.

Solution

$n = 3$, $p = 0{,}1$ (succès : « défectueuse »). $P(X = 0) = 0{,}9^3 = 0{,}729$; $P(X \geqslant 1) = 1 - 0{,}729 = 0{,}271$; $P(X = 1) = 3 \times 0{,}1 \times 0{,}9^2 = 0{,}243$.

Exercice 5 : Quatre lancers de pièce

On lance 4 fois une pièce équilibrée ; X est le nombre de « Pile ».

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $P(X \geqslant 3)$.

Solution

1. Chaque chemin a pour probabilité $\frac{1}{16}$: $P(X=0)=\frac{1}{16}$, $P(X=1)=\frac{4}{16}$, $P(X=2)=\frac{6}{16}$, $P(X=3)=\frac{4}{16}$, $P(X=4)=\frac{1}{16}$.
2. $P(X \geqslant 3)=\frac{4+1}{16}=\frac{5}{16}$.

Exercice 6 : Loi complète pour $n=4$

On répète 4 fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=0{,}2$. Déterminer la loi du nombre de succès X, puis calculer $E(X)$ et comparer avec $4\times 0{,}2$.

Solution

$P(X=0)=0{,}8^4=0{,}4096$; $P(X=1)=4\times 0{,}2\times 0{,}8^3=0{,}4096$; $P(X=2)=6\times 0{,}2^2\times 0{,}8^2=0{,}1536$; $P(X=3)=4\times 0{,}2^3\times 0{,}8=0{,}0256$; $P(X=4)=0{,}2^4=0{,}0016$ (total 1).
$E(X)=0{,}4096+0{,}3072+0{,}0768+0{,}0064=0{,}8=4\times 0{,}2$.

Exercice 7 : Un vaccin

Un vaccin protège une personne avec la probabilité $0{,}9$. Trois personnes sont vaccinées (indépendamment). Calculer la probabilité que les trois soient protégées, puis qu'au moins deux le soient.

Solution

$P(X=3)=0{,}9^3=0{,}729$; $P(X=2)=3\times 0{,}9^2\times 0{,}1=0{,}243$; $P(X\geqslant 2)=0{,}729+0{,}243=0{,}972$.

Exercice 8 : Un jeu

On paie 2 € pour lancer deux fois un dé ; chaque « 6 » obtenu rapporte 5 €. X est le nombre de 6 et G le gain net.

1. Déterminer la loi de X et $E(X)$.
2. Exprimer G en fonction de X et calculer $E(G)$. Le jeu est-il favorable ?

Solution

1. $P(X=0)=\frac{25}{36}$, $P(X=1)=\frac{10}{36}$, $P(X=2)=\frac{1}{36}$; $E(X)=\frac{10+2}{36}=\frac{1}{3}$.
2. $G=5X-2$; $E(G)=5\times\frac{1}{3}-2=-\frac{1}{3}$: défavorable au joueur.

Exercice 9 : Retrouver p

On répète deux fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre p. La probabilité d'obtenir au moins un succès est $0{,}64$. Déterminer p.

Solution

$1-(1-p)^2=0{,}64 \iff (1-p)^2=0{,}36 \iff 1-p=0{,}6$ (car $1-p\geqslant 0$) $\iff p=0{,}4$.

Exercice 10 : Avec ou sans remise

Une urne contient 4 boules blanches et 6 noires. On tire 3 boules. Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules blanches si les tirages se font avec remise, puis sans remise. Dans quel cas a-t-on une répétition d'épreuves de Bernoulli ?

✔ Solution

Avec remise (épreuves identiques et indépendantes, $p = 0{,}4$) : $0{,}4^3 = 0{,}064$.
Sans remise (pas de schéma de Bernoulli) : $\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30} \approx 0{,}033$.