CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 3

1ère Spé Maths

Probabilités conditionnelles

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Organisation de la série

Partie A – Probabilités conditionnelles, tableaux et arbres (ex. 1 à 4)
Partie B – Formule des probabilités totales (ex. 5 à 8)
Partie C – Indépendance (ex. 9 à 12)

A Probabilités conditionnelles, tableaux et arbres

Exercice 1 : Calcul direct

A et B sont deux événements tels que $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$.

1. Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
2. Calculer $P_A(\overline{B})$.

Solution

1. $P_A(B) = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25$; $P_B(A) = \frac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2$.
2. $P_A(\overline{B}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

Exercice 2 : Tableau croisé

Un lycée compte 500 élèves répartis ainsi :

	Demi-pens.	Externe	Total
Filles	180	100	280
Garçons	150	70	220
Total	330	170	500

On choisit un élève au hasard. F : « c'est une fille », D : « il est demi-pensionnaire ».

1. Calculer $P(F)$, $P(D)$ et $P(F \cap D)$.
2. Calculer $P_F(D)$ puis $P_D(F)$ (arrondis au millième).
3. Les événements F et D sont-ils indépendants ?

Solution

1. $P(F) = \frac{280}{500} = 0{,}56$; $P(D) = \frac{330}{500} = 0{,}66$; $P(F \cap D) = \frac{180}{500} = 0{,}36$.
2. $P_F(D) = \frac{180}{280} = \frac{9}{14} \approx 0{,}643$; $P_D(F) = \frac{180}{330} = \frac{6}{11} \approx 0{,}545$.
3. $P_F(D) \neq P(D)$: non indépendants.

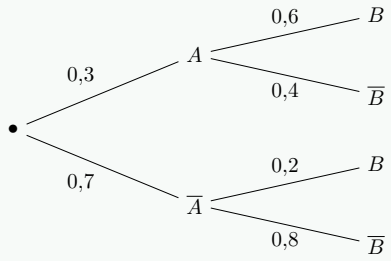
Exercice 3 : Compléter un arbre

On donne $P(A) = 0{,}3$, $P_A(B) = 0{,}6$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}2$.

1. Construire l'arbre pondéré complet.
2. Calculer $P(A \cap B)$, $P(\overline{A} \cap B)$ puis $P(B)$.
3. En déduire $P_B(A)$.

Solution

1. Branches : $0{,}3$ / $0{,}7$; puis $0{,}6$ / $0{,}4$ et $0{,}2$ / $0{,}8$.



2. $P(A \cap B) = 0{,}18$; $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}14$; $P(B) = 0{,}32$.
3. $P_B(A) = \frac{0{,}18}{0{,}32} = 0{,}5625$.

Exercice 4 : Reconstituer un arbre

On sait que $P(A) = 0{,}4$, $P(A \cap B) = 0{,}1$ et $P(B) = 0{,}46$. Déterminer $P_A(B)$, $P(\overline{A} \cap B)$ et $P_{\overline{A}}(B)$, puis construire l'arbre pondéré.

Solution

$P_A(B) = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25$; $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}46 - 0{,}1 = 0{,}36$; $P_{\overline{A}}(B) = \frac{0{,}36}{0{,}6} = 0{,}6$. Arbre : $0{,}4$ / $0{,}6$; puis $0{,}25$ / $0{,}75$ et $0{,}6$ / $0{,}4$.

B Formule des probabilités totales

Exercice 5 : Deux urnes

Une urne U_1 contient 3 boules rouges et 2 noires ; une urne U_2 contient 1 boule rouge et 4 noires. On lance une pièce équilibrée : si « Pile », on tire une boule dans U_1, sinon dans U_2.

1. Construire un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de tirer une boule rouge.
3. On a tiré une boule rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de U_1 ?

Solution

1. U_1 : $0{,}5$ puis R : $0{,}6$; U_2 : $0{,}5$ puis R : $0{,}2$.
2. $P(R) = 0{,}5 \times 0{,}6 + 0{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}4$.
3. $P_R(U_1) = \frac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75$.

Exercice 6 : Test de dépistage

Une maladie touche $2\,\%$ d'une population. Un test est positif chez $99\,\%$ des malades et chez $3\,\%$ des personnes saines. On note M : « la personne est malade » et T : « le test est positif ».

1. Construire l'arbre pondéré.
2. Calculer $P(T)$.

3 Le test d'une personne est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? Commenter.

✔ Solution

1 M : 0,02 (T : 0,99) ; $\overline{M}$: 0,98 (T : 0,03).

2 $P(T) = 0{,}02 \times 0{,}99 + 0{,}98 \times 0{,}03 = 0{,}0198 + 0{,}0294 = 0{,}0492$.

3 $P_T(M) = \frac{0{,}0198}{0{,}0492} \approx 0{,}402$: moins d'une chance sur deux ! La maladie est rare, donc les faux positifs sont nombreux.

Exercice 7 : Trois machines

Une usine utilise trois machines : M_1 fabrique $50\,\%$ des pièces, M_2 $30\,\%$ et M_3 le reste. Les taux de pièces défectueuses sont $1\,\%$, $2\,\%$ et $3\,\%$.

1 Calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.

2 Une pièce est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de M_3 ?

✔ Solution

1 $P(D) = 0{,}5 \times 0{,}01 + 0{,}3 \times 0{,}02 + 0{,}2 \times 0{,}03 = 0{,}017$.

2 $P_D(M_3) = \frac{0{,}006}{0{,}017} \approx 0{,}353$.

Exercice 8 : QCM

À une question de QCM à 4 réponses (une seule juste), un élève connaît la réponse avec la probabilité 0,6 ; sinon il répond au hasard. On note C : « il connaît la réponse » et J : « sa réponse est juste ».

1 Calculer $P(J)$.

2 Sa réponse est juste. Quelle est la probabilité qu'il ait connu la réponse ?

✔ Solution

1 $P(J) = 0{,}6 \times 1 + 0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}7$.

2 $P_J(C) = \frac{0{,}6}{0{,}7} = \frac{6}{7} \approx 0{,}857$.

C Indépendance

Exercice 9 : Par le calcul

1 $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cap B) = 0{,}18$: A et B sont-ils indépendants ?

2 $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cup B) = 0{,}7$: même question.

✔ Solution

1 $0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18 = P(A \cap B)$: indépendants.

2 $P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}6 - 0{,}7 = 0{,}2 \neq 0{,}18$: non indépendants.

Exercice 10 : Lancer d'un dé

On lance un dé équilibré à 6 faces. A : « le résultat est pair », B : « le résultat est inférieur ou égal à 4 », C : « le résultat est un multiple de 3 ». Étudier l'indépendance de A et B, de A et C, puis de B et C.

✔ Solution

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(C) = \frac{1}{3}$. $A \cap B = \{2;4\}$: $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$: indépendants. $A \cap C = \{6\}$: $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$: indépendants. $B \cap C = \{3\}$: $\frac{1}{6} \neq \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$: non indépendants.

Exercice 11 : Démonstration

Soit A et B deux événements indépendants de probabilités non nulles.

1. Montrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.
2. En déduire que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Solution

1. $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)\big(1 - P(B)\big) = P(A)P(\overline{B})$.
2. On applique le 1. aux événements indépendants $\overline{B}$ et A : $\overline{B}$ et $\overline{A}$ sont indépendants.

Exercice 12 : Comme au DST

Dans un magasin, $40\,\%$ des clients paient par carte. Parmi eux, $25\,\%$ ont une carte de fidélité ; parmi les autres clients, $10\,\%$ ont une carte de fidélité. On choisit un client au hasard. C : « il paie par carte », F : « il a une carte de fidélité ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le client paie par carte et ait une carte de fidélité.
3. Montrer que $P(F) = 0{,}16$.
4. Un client a une carte de fidélité. Quelle est la probabilité qu'il paie par carte ?
5. Les événements C et F sont-ils indépendants ?

Solution

1. $C : 0{,}4$ ($F : 0{,}25$; $\overline{F} : 0{,}75$) ; $\overline{C} : 0{,}6$ ($F : 0{,}1$; $\overline{F} : 0{,}9$).
2. $P(C \cap F) = 0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}1$.
3. $P(F) = 0{,}1 + 0{,}6 \times 0{,}1 = 0{,}16$.
4. $P_F(C) = \frac{0{,}1}{0{,}16} = 0{,}625$.
5. $P_C(F) = 0{,}25 \neq 0{,}16 = P(F)$: non indépendants.