CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 6

Produit scalaire

1ère Spé Maths

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Exercice 1 : Avec la définition

1. $AB = 6$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{6}$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{2\pi}{3}$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 4$. Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

✔ Solution

1. $6 \times 5 \times \cos\dfrac{\pi}{6} = 30 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$.
2. $2 \times 3 \times \cos\dfrac{2\pi}{3} = 6 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -3$.
3. $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{-6}{3 \times 4} = -\dfrac{1}{2}$, donc l'angle mesure $\dfrac{2\pi}{3}$ $(120°)$.

Exercice 2 : Avec des projections

1. ABC est équilatéral de côté 4 et H est le milieu de $[BC]$. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.
2. $ABCD$ est un carré de côté 5 de centre O. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BD}$.

✔ Solution

1. Le projeté de A sur (BC) est H : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BH \times BC = 2 \times 4 = 8$.
   Le projeté de B sur (AH) est H : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AH^2$. Or $AH^2 = 4^2 - 2^2 = 12$ (Pythagore), donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 12$.
2. Le projeté de O sur (AB) est le milieu de $[AB]$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = 5 \times \dfrac{5}{2} = 12{,}5$.
   Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires : $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

Exercice 3 : Avec les normes

1. ABC est un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 7$ et $BC = 8$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis une mesure approchée de $\widehat{BAC}$.
2. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

✔ Solution

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(25 + 49 - 64) = 5$. $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{5}{5 \times 7} = \dfrac{1}{7}$, donc $\widehat{BAC} \approx 81{,}8°$.
2. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 4 + 2 \times (-1) + 9 = 11$, donc $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{11}$.
   $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4 - 2 \times (-1) + 9 = 15$, donc $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{15}$.

Exercice 4 : Un triangle en coordonnées

Dans un repère orthonormé, on donne $A(2\,;1)$, $B(5\,;5)$ et $C(-2\,;4)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire ?
2. Calculer AB et AC. Préciser la nature du triangle ABC.

Solution

1. $\overrightarrow{AB}\,(3\,;4)$, $\overrightarrow{AC}\,(-4\,;3)$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-12+12=0$: le triangle est rectangle en A.
2. $AB=\sqrt{9+16}=5$ et $AC=\sqrt{16+9}=5$: ABC est **rectangle isocèle** en A.

Exercice 5 : Calculer un angle

Dans un repère orthonormé, on donne $\vec{u}\,(1\,;2)$ et $\vec{v}\,(3\,;1)$. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, puis la mesure de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$.

Solution

$\vec{u}\cdot\vec{v}=3+2=5$; $\|\vec{u}\|=\sqrt{5}$; $\|\vec{v}\|=\sqrt{10}$.

$\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\dfrac{5}{\sqrt{50}}=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$: l'angle mesure $\dfrac{\pi}{4}$ $(45°)$.

Exercice 6 : Orthogonalité et paramètre

1. Déterminer le réel m tel que $\vec{u}\,(m\,;m+1)$ et $\vec{v}\,(2\,;-3)$ soient orthogonaux.
2. Soit $A(1\,;3)$ et $B(4\,;-1)$. Déterminer le point D de l'axe des abscisses tel que le triangle ABD soit rectangle en A.

Solution

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=2m-3(m+1)=-m-3=0\iff m=-3$.
2. $D(x\,;0)$. $\overrightarrow{AB}\,(3\,;-4)$, $\overrightarrow{AD}\,(x-1\,;-3)$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=3(x-1)+12=3x+9=0\iff x=-3$. $D(-3\,;0)$.

Exercice 7 : Distance entre deux bateaux

Deux bateaux partent d'un port A. Le premier rejoint le point B à 12 km de A, le second le point C à 9 km de A. L'angle $\widehat{BAC}$ mesure $50°$. Calculer la distance BC, arrondie à 0,01 km.

Solution

Al-Kashi : $BC^2=12^2+9^2-2\times12\times9\times\cos 50°=225-216\cos 50°\approx225-138{,}84=86{,}16$.

Donc $BC\approx9{,}28$ km.

Exercice 8 : Les angles d'un triangle

Un triangle ABC a pour côtés $BC=8$, $AC=7$ et $AB=6$. Calculer une mesure approchée au dixième de degré de chacun de ses angles.

Solution

$\cos\widehat{A}=\dfrac{7^2+6^2-8^2}{2\times7\times6}=\dfrac{21}{84}=0{,}25$, donc $\widehat{A}\approx75{,}5°$.

$\cos\widehat{B}=\dfrac{8^2+6^2-7^2}{2\times8\times6}=\dfrac{51}{96}$, donc $\widehat{B}\approx57{,}9°$.

$\cos\widehat{C}=\dfrac{8^2+7^2-6^2}{2\times8\times7}=\dfrac{77}{112}$, donc $\widehat{C}\approx46{,}6°$. (Vérification : $75{,}5+57{,}9+46{,}6=180$.)

Exercice 9 : Cercle de diamètre $[AB]$

Dans un repère orthonormé, on donne $A(1\,;-2)$ et $B(5\,;2)$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

1. Déterminer la nature de $\mathcal{C}$, son centre I et son rayon.
2. Les points $F(1\,;2)$, $G(5\,;-2)$ et $O(0\,;0)$ appartiennent-ils à $\mathcal{C}$?

Solution

1. Cercle de diamètre $[AB]$: centre $I(3\,;0)$, rayon $\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{16+16}}{2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$.
2. $\overrightarrow{FA}\,(0\,;-4)$, $\overrightarrow{FB}\,(4\,;0)$: produit 0, $F\in\mathcal{C}$. $\overrightarrow{GA}\,(-4\,;0)$, $\overrightarrow{GB}\,(0\,;4)$: produit 0, $G\in\mathcal{C}$.
   $\overrightarrow{OA}\,(1\,;-2)$, $\overrightarrow{OB}\,(5\,;2)$: produit $5-4=1\neq 0$, $O\notin\mathcal{C}$.

Exercice 10 : Dans un carré

$ABCD$ est un carré de côté 4, I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$. On se place dans le repère orthonormé où $A(0\,;0)$, $B(4\,;0)$ et $D(0\,;4)$.

1. Donner les coordonnées de C, I et J.
2. Démontrer que les droites (DI) et (AJ) sont perpendiculaires.
3. Calculer une mesure approchée de l'angle $\widehat{IDJ}$.

Solution

1. $C(4\,;4)$, $I(2\,;0)$, $J(4\,;2)$.
2. $\overrightarrow{DI}\,(2\,;-4)$, $\overrightarrow{AJ}\,(4\,;2)$: $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{AJ}=8-8=0$, donc $(DI)\perp(AJ)$.
3. $\overrightarrow{DJ}\,(4\,;-2)$: $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{DJ}=8+8=16$; $DI=DJ=\sqrt{20}$. $\cos\widehat{IDJ}=\dfrac{16}{20}=0{,}8$, donc $\widehat{IDJ}\approx 36{,}9°$.