CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 1

Équations du second degré

1ère Spé Maths

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Organisation de la série

Partie A – Forme canonique et variations (ex. 1 à 5)
Partie B – Résoudre une équation du second degré (ex. 6 à 9)
Partie C – Se ramener au second degré, problèmes (ex. 10 à 15)

A Forme canonique et variations

Exercice 1 : Reconnaître un trinôme

Les fonctions suivantes sont-elles des polynômes du second degré ? Si oui, donner a, b, c.

a) $f(x) = (x-1)(x+3)$
b) $g(x) = 3 - x^2$
c) $h(x) = (x+1)^2 - x^2$
d) $k(x) = x(2x-1) + 5$
e) $m(x) = \sqrt{x} + x^2$
f) $p(x) = -\dfrac{x^2}{2} + \pi$

Solution

a) $x^2 + 2x - 3$: oui, $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$.
b) oui, $a = -1$, $b = 0$, $c = 3$.
c) $2x + 1$: non (degré 1).
d) $2x^2 - x + 5$: oui, $a = 2$, $b = -1$, $c = 5$.
e) non (à cause de $\sqrt{x}$).
f) oui, $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = \pi$.

Exercice 2 : Forme canonique avec l'identité

En utilisant $x^2 + 2bx = (x+b)^2 - b^2$, écrire sous forme canonique :

a) $x^2 + 6x + 5$
b) $x^2 - 4x + 1$
c) $x^2 + 5x$
d) $2x^2 - 12x + 7$
e) $-x^2 + 2x + 3$
f) $3x^2 + 6x$

Solution

a) $(x+3)^2 - 9 + 5 = (x+3)^2 - 4$.
b) $(x-2)^2 - 4 + 1 = (x-2)^2 - 3$.
c) $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$.
d) $2(x^2 - 6x) + 7 = 2\big[(x-3)^2 - 9\big] + 7 = 2(x-3)^2 - 11$.
e) $-(x^2 - 2x) + 3 = -\big[(x-1)^2 - 1\big] + 3 = -(x-1)^2 + 4$.
f) $3(x^2 + 2x) = 3\big[(x+1)^2 - 1\big] = 3(x+1)^2 - 3$.

Exercice 3 : Avec les formules de α et β

Déterminer la forme canonique en calculant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$

b) $g(x) = -2x^2 - 8x + 3$

c) $h(x) = x^2 + x + 1$

d) $k(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$

✔ Solution

a) $\alpha = 1$, $\beta = 3 - 6 + 1 = -2$: $f(x) = 3(x-1)^2 - 2$.

b) $\alpha = -2$, $\beta = -8 + 16 + 3 = 11$: $g(x) = -2(x+2)^2 + 11$.

c) $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$: $h(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

d) $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$: $k(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}$.

Exercice 4 : Variations et extremum

Pour les fonctions f et g de l'exercice 3 :

1. dresser le tableau de variations ;
2. préciser l'extremum, le sommet et l'axe de symétrie de la parabole.

✔ Solution

$f : a = 3 > 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	-2	↗	

minimum -2 en $x = 1$; $S(1\,;-2)$; axe $x = 1$.

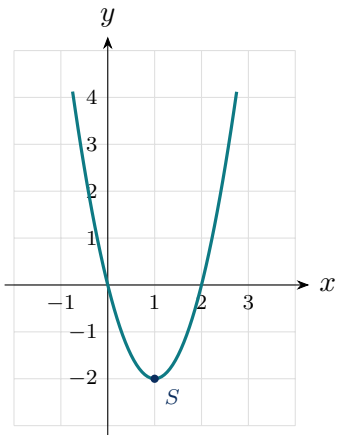
$g : a = -2 < 0$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g(x)$		↗	11	↘	

maximum 11 en $x = -2$; $S(-2\,;11)$; axe $x = -2$.

Exercice 5 : Lecture graphique

On a tracé la parabole représentant une fonction f polynôme du second degré.



1. Lire les coordonnées du sommet S et les racines de f.
2. Écrire $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ et trouver a grâce au point $O(0\,;0)$.
3. En déduire la forme développée de $f(x)$, puis vérifier les racines.

✔ Solution

1. $S(1\,;-2)$; racines 0 et 2.

2 $f(x) = a(x-1)^2 - 2$ et $f(0) = 0 \iff a - 2 = 0 \iff a = 2$: $f(x) = 2(x-1)^2 - 2$.

3 $f(x) = 2x^2 - 4x = 2x(x-2)$: les racines sont bien 0 et 2.

B Résoudre une équation du second degré

Exercice 6 : Avec le discriminant

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $2x^2 - 3x - 2 = 0$

c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

d) $x^2 + x + 1 = 0$

e) $-x^2 + 4x - 1 = 0$

f) $3x^2 + 2x - 8 = 0$

Solution

a) $\Delta = 1$: $S = \{2\,;3\}$.

b) $\Delta = 25$: $x = \frac{3\pm5}{4}$, $S = \left\{-\frac{1}{2}\,;2\right\}$.

c) $\Delta = 0$: $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

d) $\Delta = -3 < 0$: $S = \varnothing$.

e) $\Delta = 12$: $x = \frac{-4\pm2\sqrt{3}}{-2}$, $S = \{2-\sqrt{3}\,;2+\sqrt{3}\}$.

f) $\Delta = 4 + 96 = 100$: $x = \frac{-2\pm10}{6}$, $S = \left\{-2\,;\frac{4}{3}\right\}$.

Exercice 7 : Sans discriminant

Résoudre dans $\mathbb{R}$ sans calculer Δ :

a) $3x^2 = 5x$

b) $x^2 - 7 = 0$

c) $(2x-1)^2 = 9$

d) $4x^2 + 1 = 0$

e) $(x+2)(3-x) = 0$

f) $x^2 - 10x + 25 = 0$

Solution

a) $x(3x-5) = 0$: $S = \left\{0\,;\frac{5}{3}\right\}$.

b) $x^2 = 7$: $S = \{-\sqrt{7}\,;\sqrt{7}\}$.

c) $2x - 1 = 3$ ou $2x - 1 = -3$: $S = \{-1\,;2\}$.

d) $x^2 = -\frac{1}{4} < 0$: $S = \varnothing$.

e) $S = \{-2\,;3\}$.

f) $(x-5)^2 = 0$: $S = \{5\}$.

Exercice 8 : Racine évidente

Trouver une racine évidente, puis l'autre racine grâce au produit (ou à la somme) des racines.

a) $3x^2 - x - 2$

b) $x^2 + 4x - 21$

c) $5x^2 + 3x - 2$

d) $2x^2 - 7x + 5$

Solution

a) 1 ; $x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{2}{3}$.

b) 3 $(9 + 12 - 21 = 0)$; $3x_2 = -21$, $x_2 = -7$.

c) -1 $(5-3-2=0)$; $-x_2=-\frac{2}{5}$, $x_2=\frac{2}{5}$.

d) 1 ; $x_2=\frac{5}{2}$.

Exercice 9 : Somme et produit

Trouver, s'ils existent, deux réels dont :

a) la somme vaut 10 et le produit 21 ;

b) la somme vaut -1 et le produit -12 ;

c) la somme vaut 4 et le produit 5.

✔ Solution

Ils sont solutions de $x^2-Sx+P=0$.

a) $x^2-10x+21=0$, $\Delta=16$: 3 et 7.

b) $x^2+x-12=0$, $\Delta=49$: -4 et 3.

c) $x^2-4x+5=0$, $\Delta=-4<0$: de tels réels n'existent pas.

C Se ramener au second degré, problèmes

Exercice 10 : Équations bicarrées

Résoudre dans $\mathbb{R}$ en posant $X=x^2$:

a) $x^4-13x^2+36=0$;

b) $2x^4+x^2-3=0$.

✔ Solution

a) $X^2-13X+36=0$, $\Delta=25$: $X=4$ ou $X=9$, d'où $S=\{-3\,;-2\,;2\,;3\}$.

b) $2X^2+X-3=0$: $X=1$ ou $X=-\frac{3}{2}<0$ (rejeté). $x^2=1$: $S=\{-1\,;1\}$.

Exercice 11 : Autres changements

1 Résoudre dans $[0\,;+\infty[$ l'équation $x-5\sqrt{x}+6=0$ en posant $X=\sqrt{x}$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation $x+\dfrac{2}{x}=3$.

✔ Solution

1 $X^2-5X+6=0$: $X=2$ ou $X=3$ (positifs). $\sqrt{x}=2 \iff x=4$; $\sqrt{x}=3 \iff x=9$: $S=\{4\,;9\}$.

2 On multiplie par $x\neq 0$: $x^2+2=3x \iff x^2-3x+2=0$: $S=\{1\,;2\}$.

Exercice 12 : Un paramètre

Déterminer les valeurs du réel m pour lesquelles l'équation $x^2+mx+9=0$ admet une unique solution. Donner alors cette solution.

✔ Solution

$\Delta=m^2-36=0 \iff m=6$ ou $m=-6$. Si $m=6$: $x_0=-3$; si $m=-6$: $x_0=3$.

Exercice 13 : Rectangle

Un rectangle a une aire de 60 m^2 et un périmètre de 32 m. Déterminer ses dimensions.

Solution

Largeur et longueur ont pour somme 16 et produit 60 : solutions de $x^2 - 16x + 60 = 0$, $\Delta = 16$, $x = \frac{16 \pm 4}{2}$. Le rectangle mesure 6 m sur 10 m.

Exercice 14 : Le nombre d'or

Déterminer le nombre réel positif φ tel que $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Solution

$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, $\Delta = 5$: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ (l'autre solution $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ est négative).

Exercice 15 : Lancer d'une balle

Une balle est lancée verticalement ; sa hauteur (en m) au bout de t secondes est $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$.

1. Écrire $h(t)$ sous forme canonique. Quelle est la hauteur maximale atteinte ? À quel instant ?
2. Au bout de combien de temps la balle touche-t-elle le sol ? (valeur exacte puis arrondi au centième)

Solution

1. $\alpha = \frac{-20}{-10} = 2$, $\beta = h(2) = -20 + 40 + 1 = 21$: $h(t) = -5(t-2)^2 + 21$. Hauteur maximale 21 m, au bout de 2 s.
2. $-5t^2 + 20t + 1 = 0$: $\Delta = 400 + 20 = 420$, $t = \frac{-20 - \sqrt{420}}{-10} = 2 + \frac{\sqrt{420}}{10} \approx 4{,}05$ s (l'autre solution est négative).