CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 11

Suites arithmétiques, suites géométriques

1ère Spé Maths

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Exercice 1 : Reconnaître

Les suites suivantes sont-elles arithmétiques, géométriques ou ni l'une ni l'autre ?

1. $u_n = 7 - 2n$;
2. $v_n = \dfrac{5^n}{3}$;
3. $w_n = n^2 + 1$;
4. $t_0 = 4$ et $t_{n+1} = \dfrac{t_n}{2}$.

Solution

1. $u_{n+1} - u_n = -2$: arithmétique de raison -2.
2. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 5$: géométrique de raison 5.
3. $w_{n+1} - w_n = 2n + 1$ non constant ; $w_0 = 1$, $w_1 = 2$, $w_2 = 5$: quotients 2 puis $2{,}5$: ni l'une ni l'autre.
4. $t_{n+1} = \frac{1}{2} t_n$: géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Exercice 2 : Arithmétique : terme général

1. (u_n) est arithmétique, $u_0 = 12$ et $r = -1{,}5$. Calculer u_{10} et u_{40}.
2. (u_n) est arithmétique, $u_4 = 11$ et $u_{10} = 29$. Déterminer r, u_0 et u_n.
3. Pour quelle valeur de n a-t-on $u_n = 2026$ dans la question 2 ?

Solution

1. $u_n = 12 - 1{,}5n$: $u_{10} = -3$; $u_{40} = -48$.
2. $6r = 29 - 11 = 18$, donc $r = 3$; $u_0 = 11 - 12 = -1$; $u_n = -1 + 3n$.
3. $-1 + 3n = 2026 \iff n = \dfrac{2027}{3}$, qui n'est pas entier : aucun terme ne vaut 2026.

Exercice 3 : Géométrique : terme général

1. (v_n) est géométrique, $v_0 = 5$ et $q = -2$. Calculer v_1, v_2, v_3 et v_{10}.
2. (v_n) est géométrique de raison positive, $v_2 = 4$ et $v_4 = 1$. Déterminer q, v_0 et v_n.

Solution

1. $v_1 = -10$, $v_2 = 20$, $v_3 = -40$; $v_{10} = 5 \times (-2)^{10} = 5120$.
2. $q^2 = \dfrac{v_4}{v_2} = \dfrac{1}{4}$ et $q > 0$, donc $q = \dfrac{1}{2}$; $v_0 = \dfrac{v_2}{q^2} = 16$; $v_n = 16 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 4 : Sens de variation

Donner le sens de variation des suites :

1. $u_n = -3 + 0{,}2n$;
2. $v_n = 4 \times 0{,}7^n$;
3. $w_n = -2 \times 1{,}1^n$;
4. $t_n = 10 \times (-0{,}5)^n$.

Solution

1. Arithmétique de raison $0{,}2 > 0$: croissante.
2. Géométrique, $v_0 = 4 > 0$, $0 < q < 1$: décroissante.
3. Géométrique, $w_0 = -2 < 0$, $q > 1$: $w_{n+1} - w_n = -2 \times 1{,}1^n \times 0{,}1 < 0$: décroissante.
4. $q < 0$: les termes changent de signe, la suite n'est pas monotone.

Exercice 5 : Sommes

Calculer :

1. $1 + 2 + \cdots + 200$;
2. $5 + 9 + 13 + \cdots + 81$;
3. $3 + 6 + 12 + \cdots + 3 \times 2^9$;
4. $u_0 + u_1 + \cdots + u_{15}$ pour $u_n = 2 - 3n$.

Solution

1. $\dfrac{200 \times 201}{2} = 20\,100$.
2. Raison 4 : $81 = 5 + 4k$, $k = 19$, soit 20 termes. Somme $= 20 \times \dfrac{5 + 81}{2} = 860$.
3. Raison 2, 10 termes : $3 \times \dfrac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 3 \times 1023 = 3069$.
4. 16 termes, de $u_0 = 2$ à $u_{15} = -43$: $16 \times \dfrac{2 - 43}{2} = -328$.

Exercice 6 : Démontrer les formules

1. Démontrer que $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. Démontrer que, pour $q \neq 1$, $1 + q + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Solution

1. On écrit $S = 1 + 2 + \cdots + n$ et $S = n + (n-1) + \cdots + 1$; en additionnant terme à terme, $2S = n(n+1)$.
2. $S - qS = (1 + q + \cdots + q^n) - (q + \cdots + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}$, donc $S(1-q) = 1 - q^{n+1}$ et on divise par $1 - q \neq 0$.

Exercice 7 : Épargne

Léa place 500 € le 1er janvier 2025 à intérêts composés au taux annuel de $3\,\%$. On note C_n son capital en $2025 + n$.

1. Exprimer C_n en fonction de n et calculer C_{10}.
2. Au bout de combien d'années le capital aura-t-il dépassé 700 € ?

✔ Solution

1 Géométrique de raison $1{,}03$: $C_n = 500 \times 1{,}03^n$; $C_{10} \approx 671{,}96$ €.

2 $C_{11} \approx 692{,}12$ et $C_{12} \approx 712{,}88$: au bout de 12 ans.

Exercice 8 : Linéaire ou exponentielle ?

Un site compte $1\,000$ abonnés. Option A : il gagne 150 abonnés par mois. Option B : il gagne $10\,\%$ d'abonnés par mois.

1 Exprimer a_n et b_n, nombres d'abonnés après n mois dans chaque option.

2 Comparer a_6 et b_6, puis a_{12} et b_{12}.

3 À partir de quel mois l'option B devient-elle plus avantageuse ?

✔ Solution

1 $a_n = 1000 + 150n$ (arithmétique) ; $b_n = 1000 \times 1{,}1^n$ (géométrique).

2 $a_6 = 1900$, $b_6 \approx 1772$; $a_{12} = 2800$, $b_{12} \approx 3138$.

3 $a_8 = 2200$ et $b_8 \approx 2144$; $a_9 = 2350$ et $b_9 \approx 2358$: à partir du 9e mois.

Exercice 9 : Avec une suite auxiliaire

Soit $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 1$. On pose $v_n = u_n - 2$.

1 Montrer que (v_n) est géométrique.

2 En déduire v_n puis u_n en fonction de n.

3 Calculer $v_0 + v_1 + \cdots + v_9$.

✔ Solution

1 $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 0{,}5u_n - 1 = 0{,}5(u_n - 2) = 0{,}5v_n$: géométrique de raison $0{,}5$, $v_0 = 3$.

2 $v_n = 3 \times 0{,}5^n$ et $u_n = 2 + 3 \times 0{,}5^n$.

3 $3 \times \dfrac{1 - 0{,}5^{10}}{1 - 0{,}5} = 6\left(1 - \dfrac{1}{1024}\right) \approx 5{,}994$.