CORRIGÉ DE LA SÉRIE N° 7

Variable aléatoire réelle

1ère Spé Maths

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Exercice 1 : Notations et langage

X est le nombre d'enfants d'une famille choisie au hasard dans un village. Sa loi est :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,15	0,3	0,35	0,15	0,05

1. Traduire en symboles puis calculer : « au moins deux enfants » ; « au plus un enfant » ; « plus de trois enfants » ; « entre un et trois enfants ».
2. Traduire par une phrase $P(X < 2)$.

Solution

1. $P(X \geqslant 2) = 0{,}35 + 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}55$; $P(X \leqslant 1) = 0{,}15 + 0{,}3 = 0{,}45$; $P(X > 3) = P(X = 4) = 0{,}05$; $P(1 \leqslant X \leqslant 3) = 0{,}3 + 0{,}35 + 0{,}15 = 0{,}8$.
2. $P(X < 2)$ est la probabilité qu'une famille ait strictement moins de deux enfants (zéro ou un) : $0{,}45$.

Exercice 2 : Loi incomplète

La loi d'une variable aléatoire X est donnée par :

x_i	-1	0	2	5
$P(X = x_i)$	0,3	0,25	p	0,1

1. Calculer p.
2. Calculer $E(X)$ et $P(X > 0)$.

Solution

1. La somme vaut 1 : $p = 1 - 0{,}3 - 0{,}25 - 0{,}1 = 0{,}35$.
2. $E(X) = -0{,}3 + 0 + 0{,}7 + 0{,}5 = 0{,}9$; $P(X > 0) = 0{,}35 + 0{,}1 = 0{,}45$.

Exercice 3 : La roue de la fête

Une roue est partagée en 8 secteurs identiques : 1 secteur rapporte 10 €, 2 secteurs rapportent 5 € et les autres ne rapportent rien. Une partie coûte 3 €. On note X le gain net du joueur.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $E(X)$. Le jeu est-il favorable au joueur ?
3. Quel devrait être le prix d'une partie pour que le jeu soit équitable ?

Solution

1. X vaut 7 (proba $\frac{1}{8}$), 2 (proba $\frac{2}{8}$) ou -3 (proba $\frac{5}{8}$).
2. $E(X) = \dfrac{7 + 4 - 15}{8} = -\dfrac{4}{8} = -0{,}5$: le jeu est défavorable (le joueur perd $0{,}50$ € par partie en moyenne).
3. Le gain brut moyen vaut $\dfrac{10 + 2 \times 5}{8} = 2{,}5$ € : le prix doit être $2{,}50$ €.

Exercice 4 : Écart de deux dés

On lance deux dés équilibrés à six faces et on note X l'écart entre les deux numéros (le plus grand moins le plus petit).

1. À l'aide d'un tableau à double entrée, déterminer la loi de X.
2. Calculer $E(X)$.

Solution

1.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

2. $E(X) = \dfrac{0+10+16+18+16+10}{36} = \dfrac{70}{36} = \dfrac{35}{18} \approx 1{,}94.$

Exercice 5 : Tirages sans remise

Une urne contient 3 boules rouges et 2 vertes. On tire successivement et **sans remise** deux boules. X est le nombre de boules rouges obtenues.

1. Construire un arbre pondéré.
2. Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$.

Solution

1. Premier tirage : $P(R) = \frac{3}{5}$, $P(V) = \frac{2}{5}$. Second tirage : après R il reste $2R$, $2V$; après V il reste $3R$, $1V$.
2. $P(X=2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$; $P(X=0) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$; $P(X=1) = 1 - \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10}$.
   $E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10} = 1{,}2.$

Exercice 6 : Variance et écart type

La loi de X est : $P(X=1) = 0{,}1$; $P(X=2) = 0{,}2$; $P(X=3) = 0{,}3$; $P(X=4) = 0{,}4$.
Calculer $E(X)$, $E(X^2)$, puis $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Solution

$E(X) = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}9 + 1{,}6 = 3$; $E(X^2) = 0{,}1 + 0{,}8 + 2{,}7 + 6{,}4 = 10$;
$V(X) = 10 - 3^2 = 1$; $\sigma(X) = 1$.

Exercice 7 : Degrés Celsius et Fahrenheit

La température X (en °C) à midi dans une ville en juillet a une espérance de 20 et un écart type de 4. La température en degrés Fahrenheit est $F = 1{,}8X + 32$. Calculer $E(F)$, $V(F)$ et $\sigma(F)$.

Solution

$E(F) = 1{,}8 \times 20 + 32 = 68$; $V(X) = 16$ donc $V(F) = 1{,}8^2 \times 16 = 51{,}84$; $\sigma(F) = 1{,}8 \times 4 = 7{,}2$.

Exercice 8 : Deux jeux à comparer

Jeu A : on gagne 1 € ou on perd 1 € avec la même probabilité. Jeu B : on gagne 10 € ou on perd 10 € avec la même probabilité.
Calculer l'espérance et l'écart type du gain pour chaque jeu, puis comparer les deux jeux.

Solution

Jeu A : $E = 0$, $V = 0{,}5 \times 1 + 0{,}5 \times 1 = 1$, $\sigma = 1$. Jeu B : $E = 0$, $V = 0{,}5 \times 100 + 0{,}5 \times 100 = 100$, $\sigma = 10$.
Les deux jeux sont équitables, mais le jeu B est beaucoup plus **risqué** (gains très dispersés).

Exercice 9 : L'assureur

Un assureur vend un contrat 150 € par an. Chaque année, un client a un petit sinistre avec la probabilité $0{,}1$ (l'assureur paie alors 500 €) et un gros sinistre avec la probabilité $0{,}01$ (l'assureur paie $5\,000$ €). On note X le bénéfice annuel de l'assureur sur un contrat.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $E(X)$ et interpréter.
3. Quel est le prix minimal du contrat pour que l'assureur ne perde pas d'argent en moyenne ?

Solution

1. $X = 150$ (proba $0{,}89$), $X = 150 - 500 = -350$ (proba $0{,}1$), $X = 150 - 5000 = -4850$ (proba $0{,}01$).
2. $E(X) = 133{,}5 - 35 - 48{,}5 = 50$: en moyenne, l'assureur gagne 50 € par contrat et par an.
3. Les remboursements moyens valent $0{,}1 \times 500 + 0{,}01 \times 5000 = 100$ € : le contrat doit coûter au moins 100 €.